

Дробно-рациональные уравнения

Чтобы решить дробно-рациональное уравнение, надо:

- 1) Разложить все знаменатели дробей, входящих в уравнение, на множители
- 2) Найти общий знаменатель этих дробей
- 3) Умножить все слагаемые данного уравнения на общий знаменатель
- 4) Решить получившееся целое уравнение
- 5) Из найденных корней исключить те, которые обращают в нуль общий знаменатель данного уравнения.

Пример 1. Решить дробное уравнение: $1/x + 2 = 5$.

Как решаем:

1. Вспомним правило $x \neq 0$. Это значит, что область допустимых значений: x — любое число, кроме нуля.
2. Отсчитываем справа налево в числителе дробной части три знака и ставим запятую.
3. Избавимся от знаменателя. Умножим каждый член уравнения на x .

$$1 + 2x = 5x$$

4. Решим обычное уравнение.

$$5x - 2x = 1$$

$$3x = 1$$

$$x = 1/3$$

Ответ: $x = 1/3$.

$$\frac{2}{x+2} = \frac{1}{2}$$

Пример 2. Найти корень уравнения

Как решаем:

1. Область допустимых значений: $x \neq -2$.
2. Умножим обе части уравнения на выражение, которое сократит оба знаменателя: $2(x+2)$
3. Избавимся от знаменателя. Умножим каждый член уравнения на x .

$$\frac{2}{x+2} \cdot 2(x+2) = \frac{1}{2} \cdot 2(x+2)$$

4. Переведем новый множитель в числитель..

$$\frac{2 \cdot 2(x+2)}{(x+2)} = \frac{2(x+2)}{2}$$

5. Сократим левую часть на $(x+2)$, а правую на 2.

$$\begin{aligned}4 &= x + 2 \\x &= 4 - 2 = 2\end{aligned}$$

Ответ: $x = 2$.

$$\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{10}{3} + \frac{36}{x^2-9}$$

Пример 3. Решить дробное уравнение: $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{10}{3} + \frac{36}{x^2-9}$

Как решаем:

1. Найти общий знаменатель:

$$3(x-3)(x+3)$$

2. Умножим обе части уравнения на общий знаменатель. Сократим. Получилось:

$$3(x+3)(x+3) + 3(x-3)(x-3) = 10(x-3)(x+3) + 3 \cdot 36$$

3. Выполним возможные преобразования. Получилось квадратное уравнение:

$$x^2 - 9 = 0$$

4. Решим полученное квадратное уравнение:

$$x^2 = 9$$

5. Получили два возможных корня:

$$x_1 = -3, x_2 = 3$$

$$x = 4 - 2 = 2$$

6. Если $x = -3$, то знаменатель равен нулю:

$$3(x-3)(x+3) = 0$$

Если $x = 3$ — знаменатель тоже равен нулю

7. Вывод: числа -3 и 3 не являются корнями уравнения, значит у данного уравнения нет решения.

Ответ: нет решения.