

Решение логарифмических неравенств.

По определению логарифма $\log_a b$

$$(*) \quad \begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \quad \underline{\text{Всегда!}}$$

Алгоритм решения

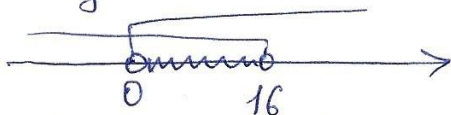
- 1) При решении логарифмического неравенства обязательно нужно рассмотреть область допустимых значений (*).
- 2) Решить само неравенство, учитывая, что
 - если основание логарифма $a > 1$, то знак неравенства не меняется
 - если основание логарифма $0 < a < 1$, то знак неравенства меняется на противоположный
- 3) Соединить решения пунктов 1 и 2, записать ответ.

Пример 1: $\log_2 x < 4$

1) (*) $x > 0$

2) $\log_2 x < \log_2 16$ $a = 2 > 1$ знак нер-ва не меняется
 $x < 16$

3) Соединяем ответы (*) и 2



Ответ: $(0; 16)$

Пример 3: $2 \log_{\frac{1}{2}}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2) \geq 1$

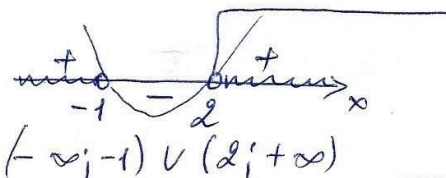
1) (*) $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x^2-x-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -1 \vee x > 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x > 2}}$

$x^2-x-2 > 0$
 $x^2-x-2 = 0$

$D = 1+8=9$

$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$

$x_2 = 2$



2) $2 \log_{\frac{1}{2}}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2) \geq 1$

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 \geq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2)$

$a = \frac{1}{2}, 0 < \frac{1}{2} < 1$ знак мен. нер-ва

$(x-2)^2 \leq \frac{1}{2}(x^2-x-2) \quad (2)$

$2(x-2)^2 \leq x^2-x-2$

$2(x^2-4x+4) \leq x^2-x-2$

$2x^2-8x+8-x^2+x+2 \leq 0$

$x^2-7x+10 \leq 0$

$x^2-7x+10 = 0$

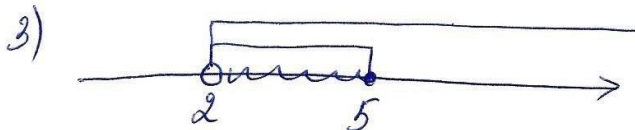
$D = 49-40=9$

$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2$

$x_2 = 5$



[2; 5]



Ответ: $[2; 5]$

Перенесём вправо, чтобы решать как логарифм произведения, потому что при частном забываем про знаменатель и убавляемся от него — этого делать НЕЛЬЗЯ.

Пример 4: $4 \log_4 (x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x-5) < 6$

1) (*) $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 5 \end{cases} \Rightarrow \underline{x > 5}$

2) $4 \log_4 (x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x-5) < 6$

$4 \log_{2^2} (x+1) - \log_{2^{-\frac{1}{2}}} (x-5) < 6$

$4 \cdot \frac{1}{2} \log_2 (x+1) - (-2) \cdot \log_2 (x-5) < 6$

$2 \log_2 (x+1) + 2 \log_2 (x-5) < 6 \quad : (2)$

$\log_2 (x+1) + \log_2 (x-5) < 3$

$\log_2 ((x+1) \cdot (x-5)) < \log_2 8 \quad a=2 > 1 \text{ ж. не мен.}$

$(x+1)(x-5) < 8$

$x^2 - 5x + x - 5 - 8 < 0$

$x^2 - 4x - 13 < 0$

$x^2 - 4x - 13 = 0$

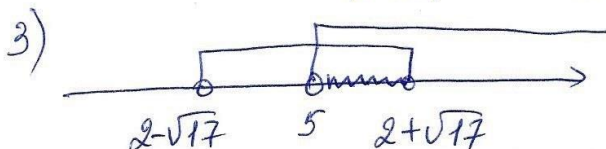
$D = 68$

$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{17}}{2} = 2 - \sqrt{17}$

$x_2 = 2 + \sqrt{17}$



$(2 - \sqrt{17}; 2 + \sqrt{17})$



Ответ: $(5; 2 + \sqrt{17})$

Решите самостоятельно неравенства.

1) $\log_3 (5-5x) \geq \log_3 (x^2-3x+2) - \log_3 (x+4)$

2) $\log_{11} (8x^2+7) - \log_{11} (x^2+x+1) \geq \log_{11} \left(\frac{x}{x+5} + 7 \right)$

3) $1 + \log_6 (4-x) \leq \log_6 (16-x^2)$

4) $\log_{\frac{1}{3}} (x-2) > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} (x-2)} + \frac{3}{2}$

Пример 5:

$$1) (*) \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$2) 2 \log_7 x - \log_x 49 < 3$$

$$2 \log_7 x - 2 \cdot \log_x 7 < 3$$

$$2 \log_7 x - 2 \cdot \frac{\log_7 7}{\log_7 x} < 3$$

$$2 \log_7 x - \frac{2}{\log_7 x} < 3$$

$$\text{Пусть } \log_7 x = t$$

$$2t - \frac{2}{t} < 3$$

$$\frac{2t^2 - 2}{t} < 3$$

$$\frac{2t^2 - 2 - 3t}{t} < 0$$

$$\frac{2t^2 - 3t - 2}{t} < 0 \quad t \neq 0$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0$$

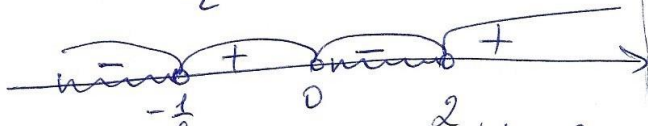
$$D = 9 + 16 = 25$$

$$t_1 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$t_2 = 2$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 2(t + \frac{1}{2})(t - 2)$$

$$\frac{2(t + \frac{1}{2})(t - 2)}{t} < 0$$



1) $\log_7 x < -\frac{1}{2}$ $x > 0$	2) $\log_7 x > 0$ $x > 0$	3) $\log_7 x < 2$ $x > 0$
---	------------------------------	------------------------------

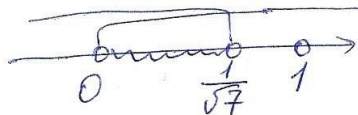
смотрим выше.

$$1) \log_7 x < -\frac{1}{2} \quad (*) x > 0$$

$$\log_7 x < \log_7 7^{-\frac{1}{2}}$$

$$a=7>1$$

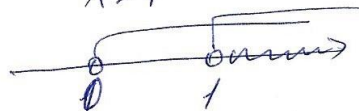
$$x < 7^{-\frac{1}{2}}$$



$$2) \log_7 x > 0 \quad (*) x > 0$$

$$\log_7 x > \log_7 1$$

$$x > 1$$

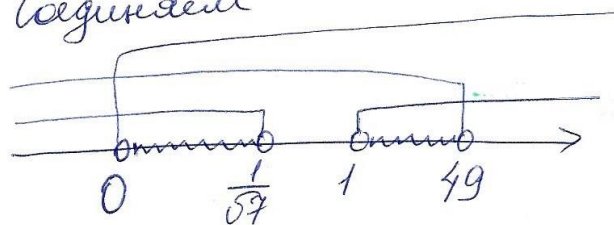


$$3) \log_7 x < 2 \quad (*) x > 0$$

$$\log_7 x < \log_7 49$$

$$x < 49$$

Собираем



$$\text{Ответ: } (0; \frac{1}{\sqrt{7}}) \cup (1; 49)$$