Понятие линейной функции

Линейная функция — это функция вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k, b — некоторые числа. При этом k — угловой коэффициент, b — свободный коэффициент.

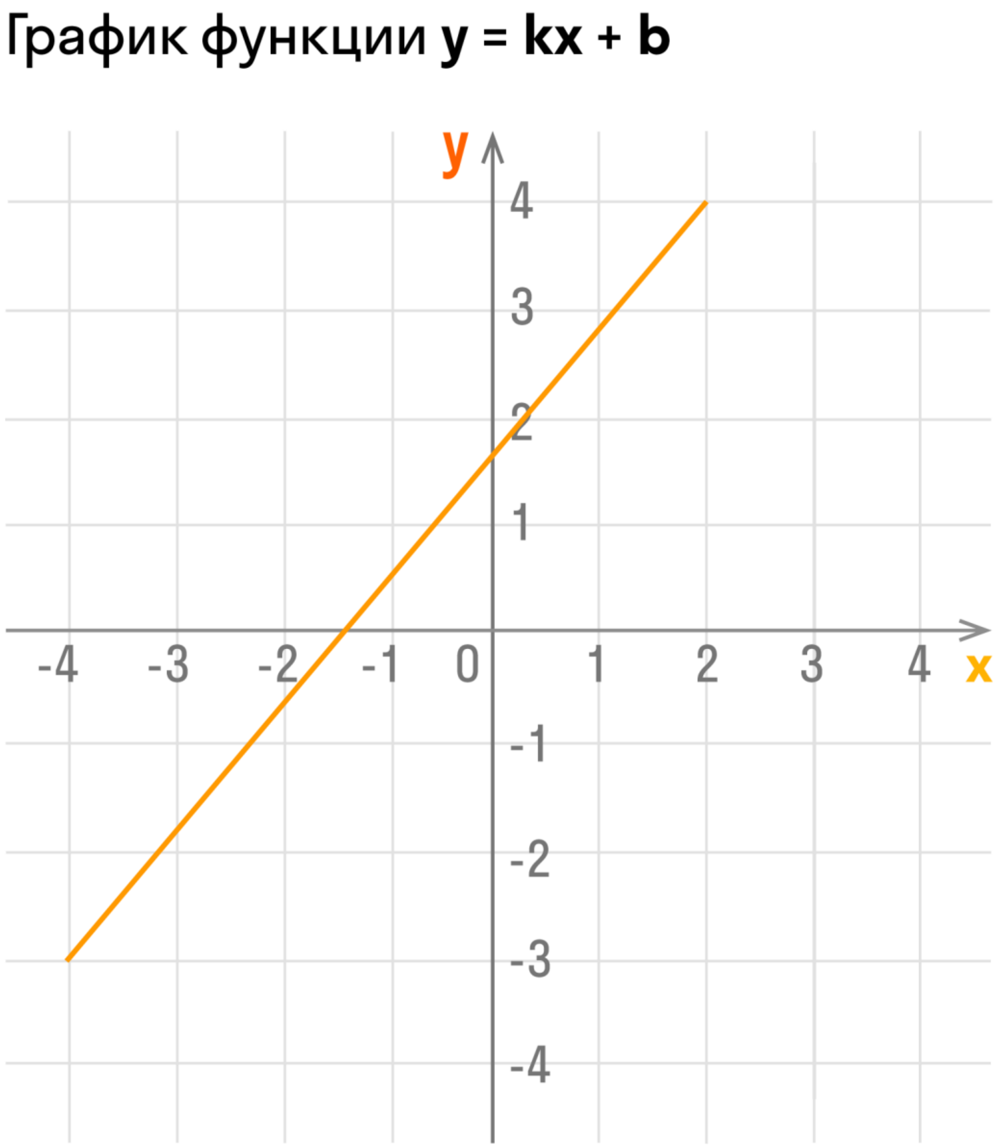
Геометрический смысл коэффициента b — длина отрезка, который отсекает прямая по оси OY, считая от начала координат.

Геометрический смысл коэффициента k — угол наклона прямой к положительному направлению оси OX, считается против часовой стрелки.

Если известно конкретное значение x, можно вычислить соответствующее значение y.

Нам дана функция: $y = 0{,}5x - 2$. Значит:

- если $x = 0$, то $y = -2$;
- если $x = 2$, то $y = -1$;
- если $x = 4$, то $y = 0$;
- и т. д.

- 

- Буквенные множители «k» и «b» — это числовые коэффициенты функции. На их месте могут стоять любые числа: положительные, отрицательные или дроби.

Давайте потренируемся и определим для каждой функций, чему равны числовые коэффициенты «k» и «b».

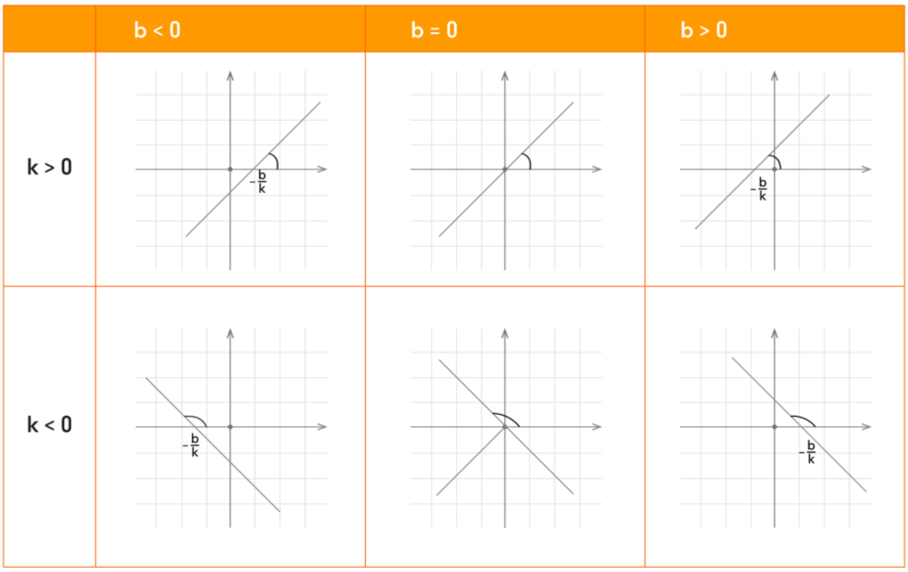
Функция	Коэффициент «k»	Коэффициент «b»
$y = 2x + 8$	$k = 2$	$b = 8$
$y = -x + 3$	$k = -1$	$b = 3$

y = 1/8x − 1	k = 1/8	b = −1
y = 0,2x	k = 0,2	b = 0

Может показаться, что в функции «y = 0,2x» нет числового коэффициента «b», но это не так. В данном случае он равен нулю. Чтобы не поддаваться сомнениям, нужно запомнить: в каждой функции типа «y = kx + b» есть коэффициенты «k» и «b».

Свойства линейной функции

1. Область определения функции — множество всех действительных чисел.
2. Множеством значений функции является множество всех действительных чисел.
3. График линейной функции — прямая. Для построения прямой достаточно знать две точки. Положение прямой на координатной плоскости зависит от значений коэффициентов k и b.



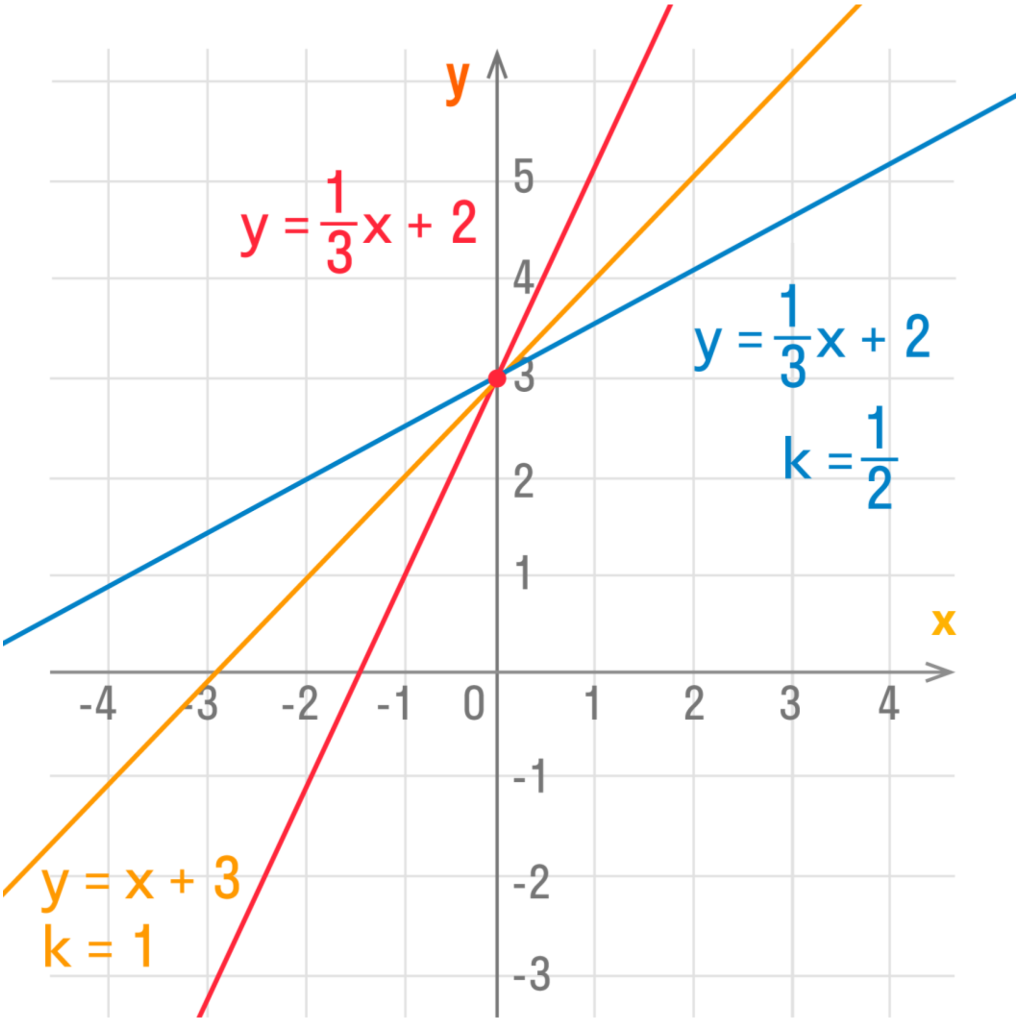
В уравнении функции y = kx + b коэффициент k отвечает за наклон графика функции:

- если k > 0, то график наклонен вправо;
- если k < 0, то график наклонен влево.

Коэффициент b отвечает за сдвиг графика вдоль оси OY:

- если b > 0, то график функции y = kx + b получается из y = kx со сдвигом на b единиц вверх вдоль оси OY;
- если b < 0, то график функции y = kx + b получается из y = kx со сдвигом на b единиц вниз вдоль оси OY.

Начертим три графика функции: y = 2x + 3, y = $^1/_2$x + 3, y = x + 3.



Квадратичная функция и ее график

В этой статье мы поговорим о том, что такое **квадратичная функция**, научимся строить ее **график** и определять вид графика в зависимости от знака дискриминанта и знака старшего коэффициента.

Итак.

Функция вида $y=ax^2+bx+c$ **, где** $a\neq 0$ **называется квадратичной функцией.**

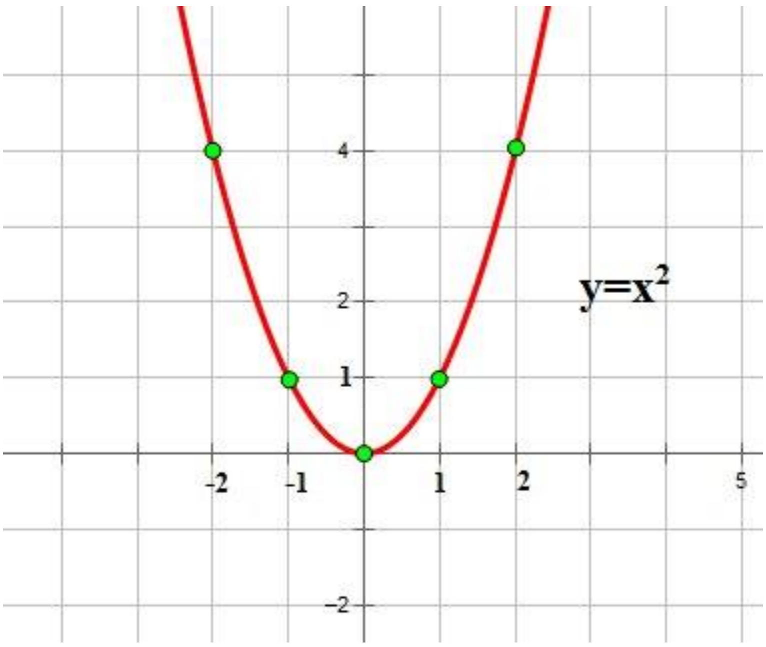
В уравнении квадратичной функции:

a - старший коэффициент

b - второй коэффициент

c - свободный член.

Графиком квадратичной функции является квадратичная парабола, которая для функции $y=x^2$ имеет вид:

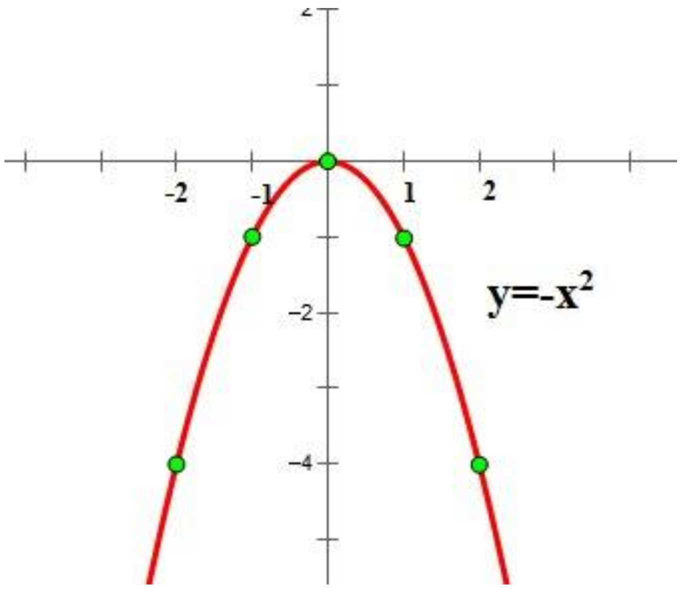


Обратите внимание на точки, обозначенные зелеными кружками - это, так называемые "базовые точки". Чтобы найти координаты этих точек для функции $y=x^2$, составим таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Внимание! Если в уравнении квадратичной функции старший коэффициент $a=1$, то график квадратичной функции имеет ровно такую же форму, как график функции $y=x^2$ при любых значениях остальных коэффициентов.

График функции $y=-x^2$ имеет вид:



Для нахождения координат базовых точек составим таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4

Обратите внимание, что график функции $y=-x^2$ симметричен графику функции $y=x^2$ относительно оси OX.

Итак, мы заметили:

Если старший коэффициент a>0, то ветви параболы направлены вверх.
Если старший коэффициент a<0, то ветви параболы направлены вниз.

Второй параметр для построения графика функции - значения x, в которых функция равна нулю, или **нули функции**. На графике нули функции $f(x)$ - это точки пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью OX.

Поскольку ордината (y) любой точки, лежащей на оси OX равна нулю, **чтобы найти координаты точек пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью OX, нужно решить уравнение $f(x)=0$.**

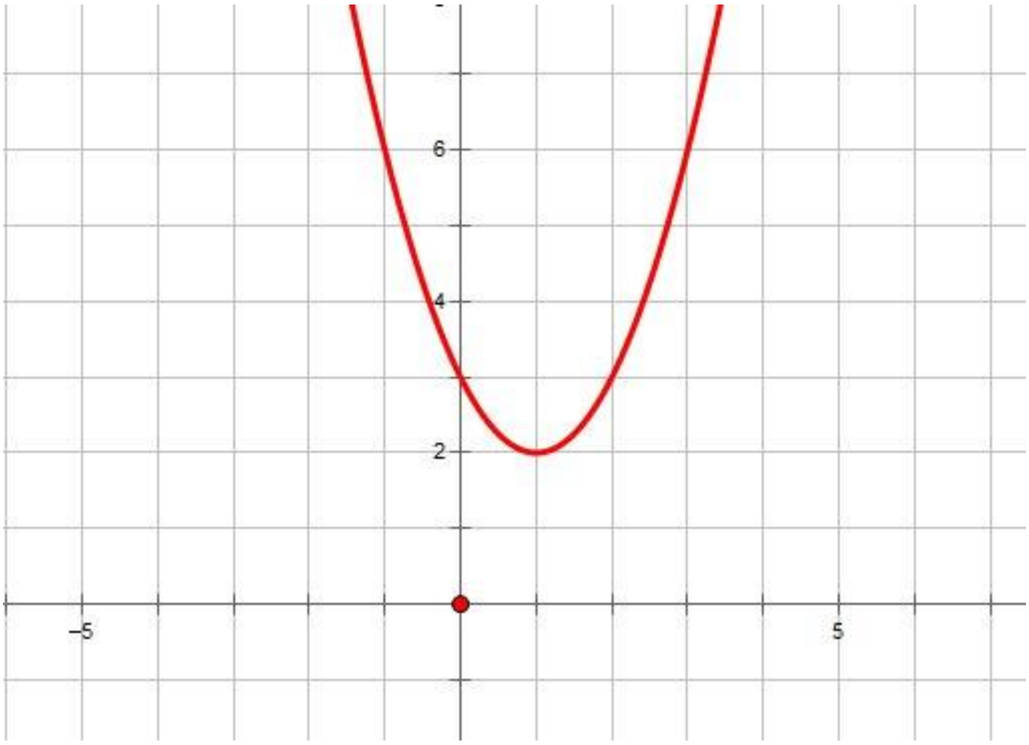
В случае квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ нужно решить квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$.

Теперь внимание!

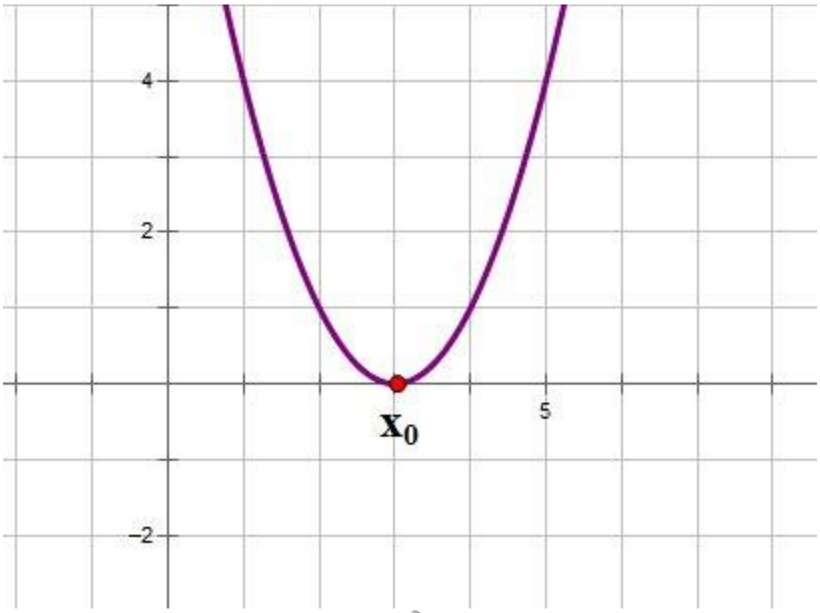
В процессе решения квадратного уравнения мы находим дискриминант: $D=b^2-4ac$, который определяет число корней квадратного уравнения.

И здесь **возможны три случая:**

1. Если $D<0$,то уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений, и, следовательно, квадратичная парабола $y=ax^2+bx+c$ не имеет точек пересечения с осью OX. Если $a>0$,то график функции выглядит как-то так:



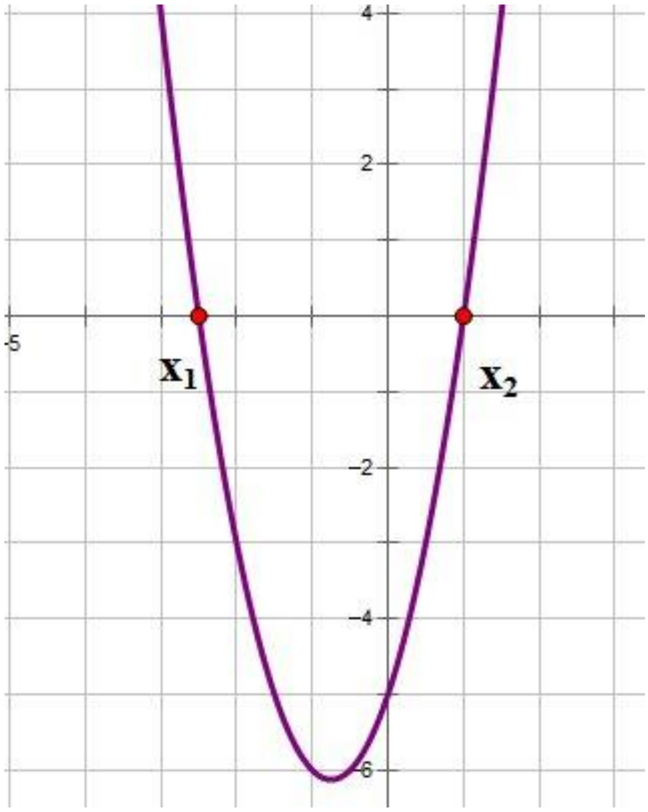
2. Если $D=0$,то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет одно решение, и, следовательно, квадратичная парабола $y=ax^2+bx+c$ имеет одну точку пересечения с осью OX. Если $a>0$,то график функции выглядит примерно так:



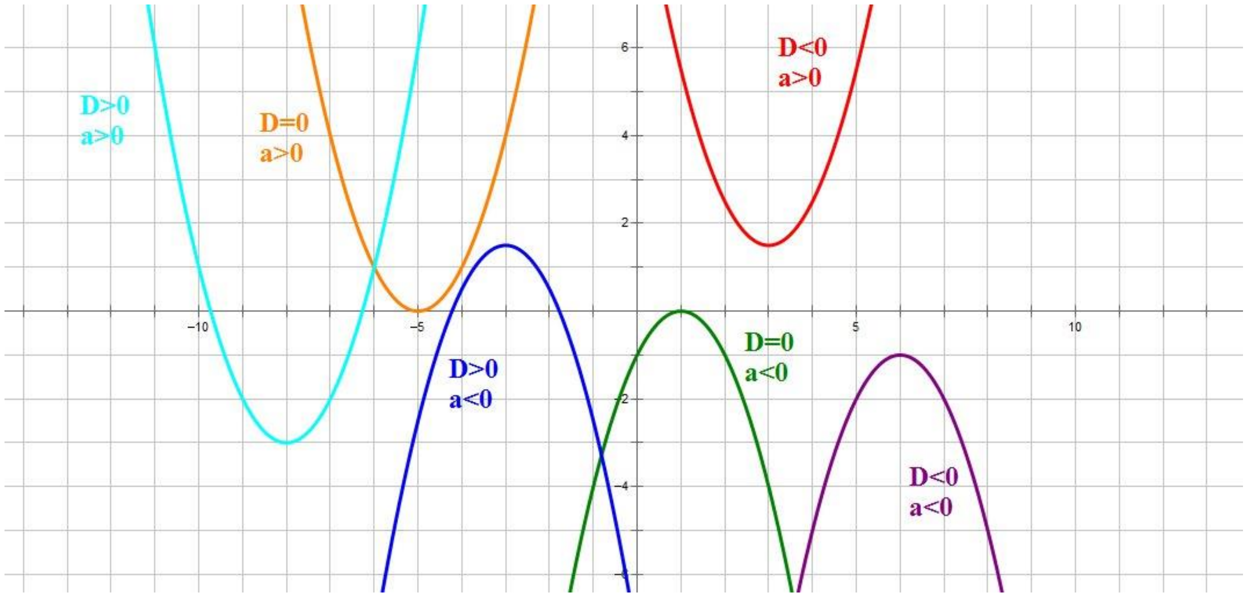
3. Если $D>0$,то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два решения, и, следовательно, квадратичная парабола $y=ax^2+bx+c$ имеет две точки пересечения с осью OX:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

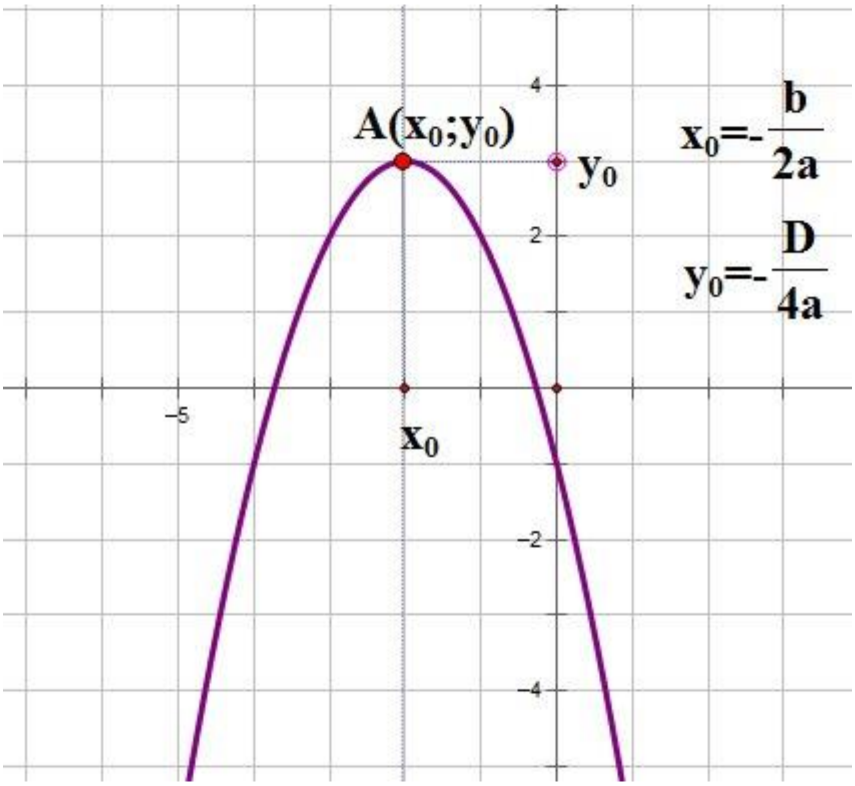
Если $a>0$,то график функции выглядит примерно так:



Следовательно, **зная направление ветвей параболы и знак дискриминанта, мы уже можем в общих чертах определить, как выглядит график нашей функции.**



Следующий важный параметр графика квадратичной функции - **координаты вершины параболы:**



x_0=-$\frac{b}{2a}$

y_0=-$\frac{D}{4a}=y\left(x_0\right)$

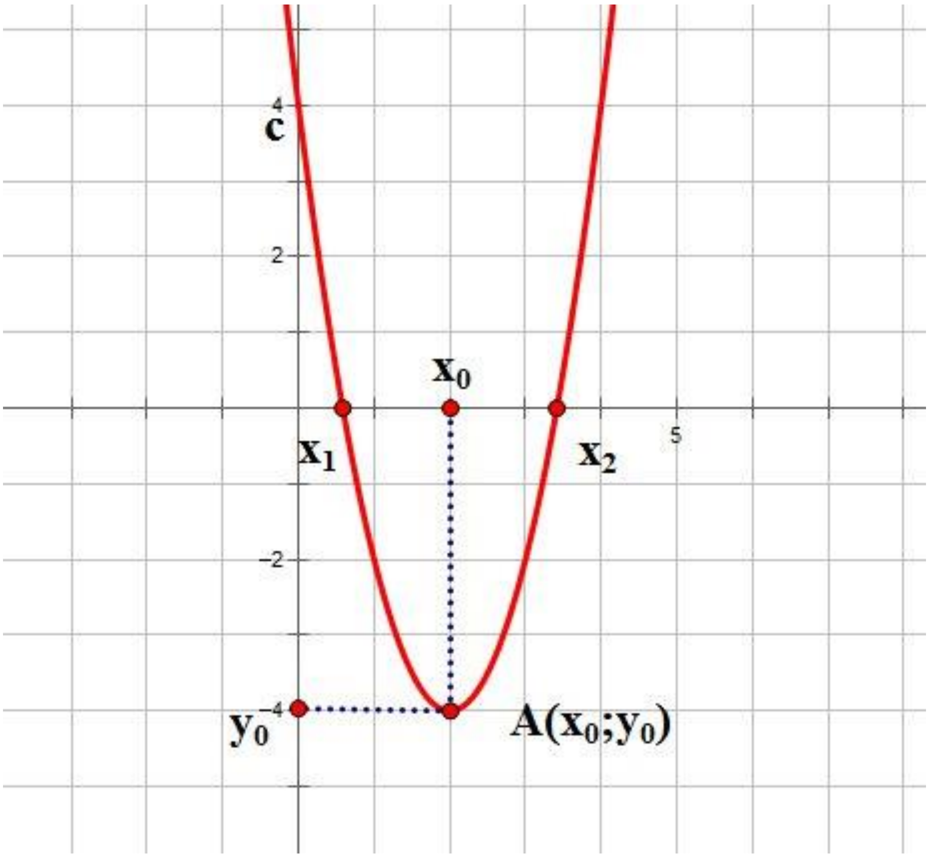
Прямая, проходящая через вершину параболы параллельно оси OY является осью симметрии параболы.

И еще один параметр, полезный при построении графика функции **- точка пересечения параболы** $y=ax^2+bx+c$ **с осью OY.**

Поскольку абсцисса любой точки, лежащей на оси OY равна нулю, чтобы найти точку пересечения параболы $y=ax^2+bx+c$ с осью OY, нужно в уравнение параболы вместо х подставить ноль: $y\left(0\right)=c$.

То есть точка пересечения параболы с осью OY имеет координаты (0;c).

Итак, основные параметры графика квадратичной функции показаны на рисунке:



Рассмотрим **несколько способов построения квадратичной параболы.** В зависимости от того, каким образом задана квадратичная функция, можно выбрать наиболее удобный.

1. Функция задана формулой $y=ax^2+bx+c$.

Рассмотрим **общий алгоритм построения графика квадратичной параболы** на примере построения графика функции $y=2x^2+3x-5$

1. Направление ветвей параболы.

Так как $a=2>0$,ветви параболы направлены вверх.

2. Найдем дискриминант квадратного трехчлена $2x^2+3x-5$

$D=b^2-4ac=9-4\times2\times(-5)=49>0 \quad \sqrt{D}=7$

Дискриминант квадратного трехчлена больше нуля, поэтому парабола имеет две точки пересечения с осью OX.

Для того, чтобы найти их координаты, решим уравнение: $2x^2+3x-5=0$

$x_1=\frac{-3+7}{4}=1$, $x_1=\frac{-3-7}{4}=-2,5$

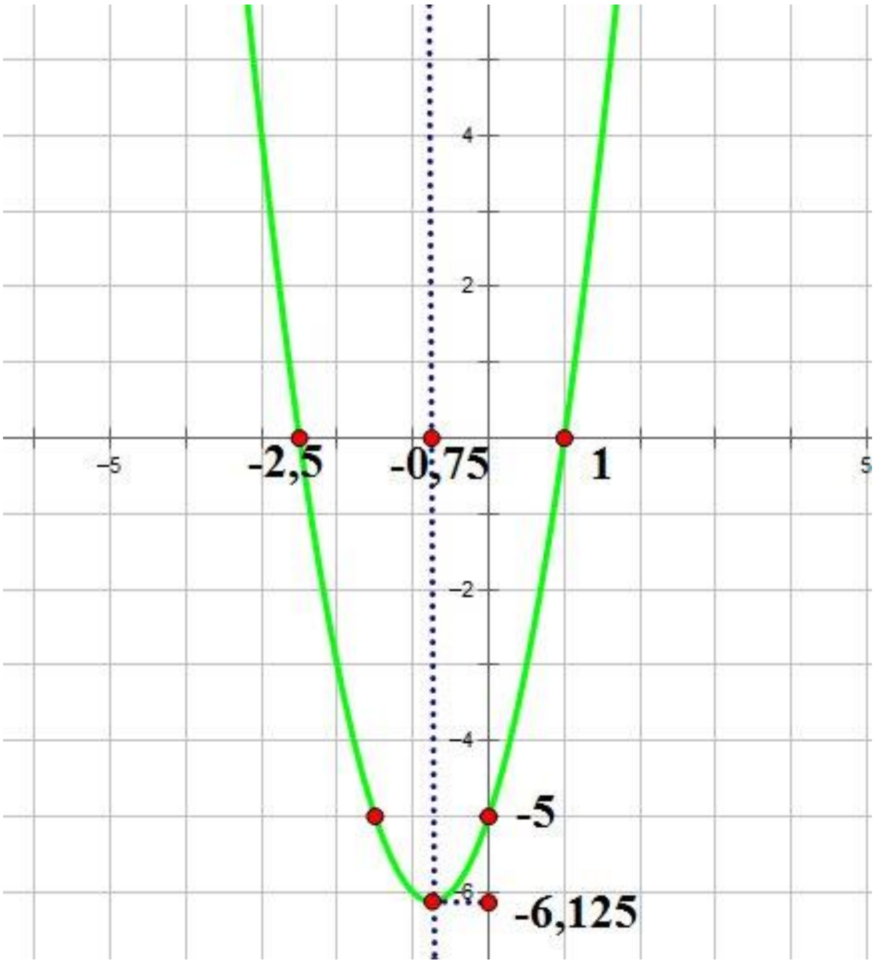
3. Координаты вершины параболы:

$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{4}=-0,75$

$$y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{49}{8} = -6{,}125$$

4. Точка пересечения параболы с осью OY: (0;-5),и ей симметричная относительно оси симметрии параболы.

Нанесем эти точки на координатную плоскость, и соединим их плавной кривой:



Этот способ можно несколько упростить.

1. Найдем координаты вершины параболы.

2. Найдем координаты точек, стоящих справа и слева от вершины.

Воспользуемся результатами построения графика функции

$$y = 2x^2 + 3x - 5$$

Коррдинаты вершины параболы

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$

$$y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{49}{8} = -6{,}125$$

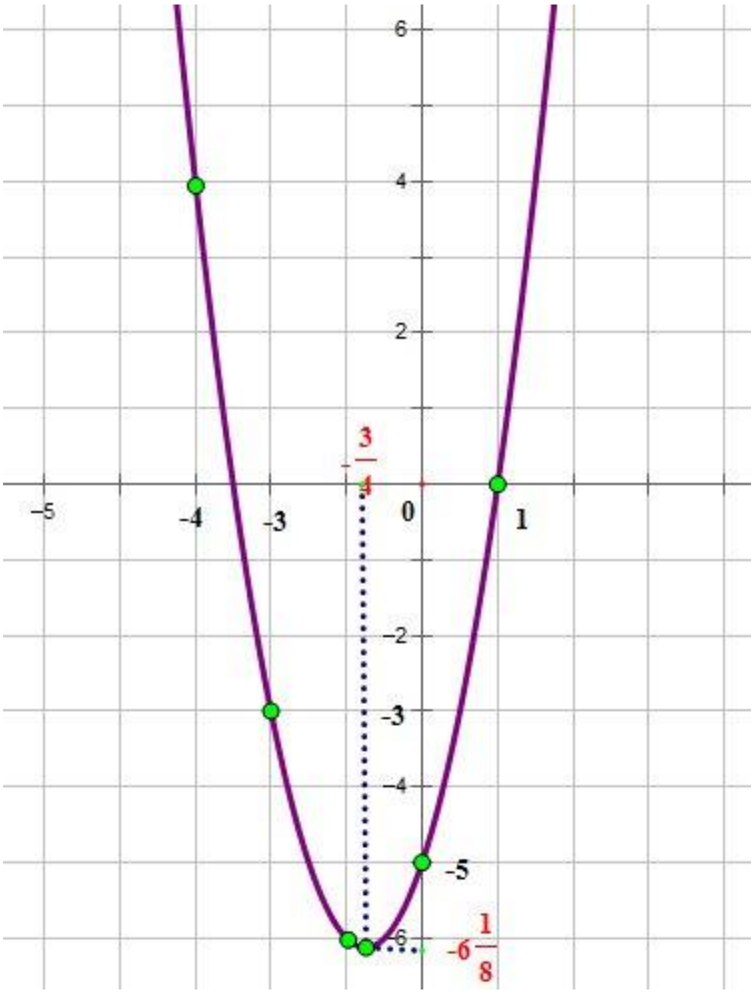
Ближайшие к вершине точки, расположенные слева от вершины имеют абсциссы соответственно -1;-2;-3

Ближайшие к вершине точки, расположенные справа имеют абсциссы соответственно 0;1;2

Подставим значения x в уравнение функции, найдем ординаты этих точек и занесем их в таблицу:

x	-3	-2	-1	$-\frac{3}{4}$	0	1	2
y	4	-3	-6	$-6\frac{1}{8}$	-5	0	9

Нанесем эти точки на координатную плоскость и соединим плавной линией:



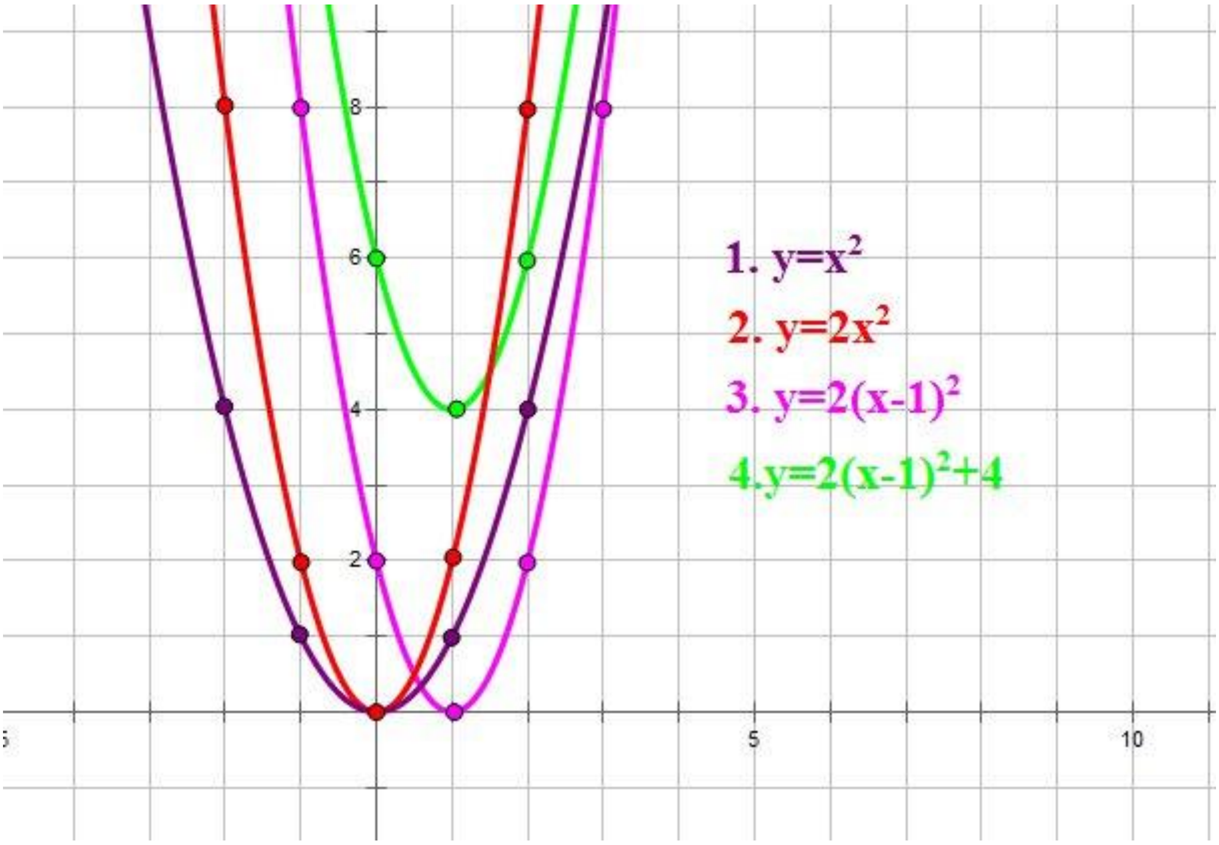
2. Уравнение квадратичной функции имеет вид $y=a\left(x-x_0\right)^2+y_0$ - в этом уравнении $x_0;y_0$ - координаты вершины параболы

или в уравнении квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ $a=1$, и второй коэффициент - четное число.

Построим для примера график функции $y=2\left(x-1\right)^2+4$.

Вспомним линейные преобразования графиков функций. Чтобы построить график функции $y=2(x-1)^2+4$, нужно

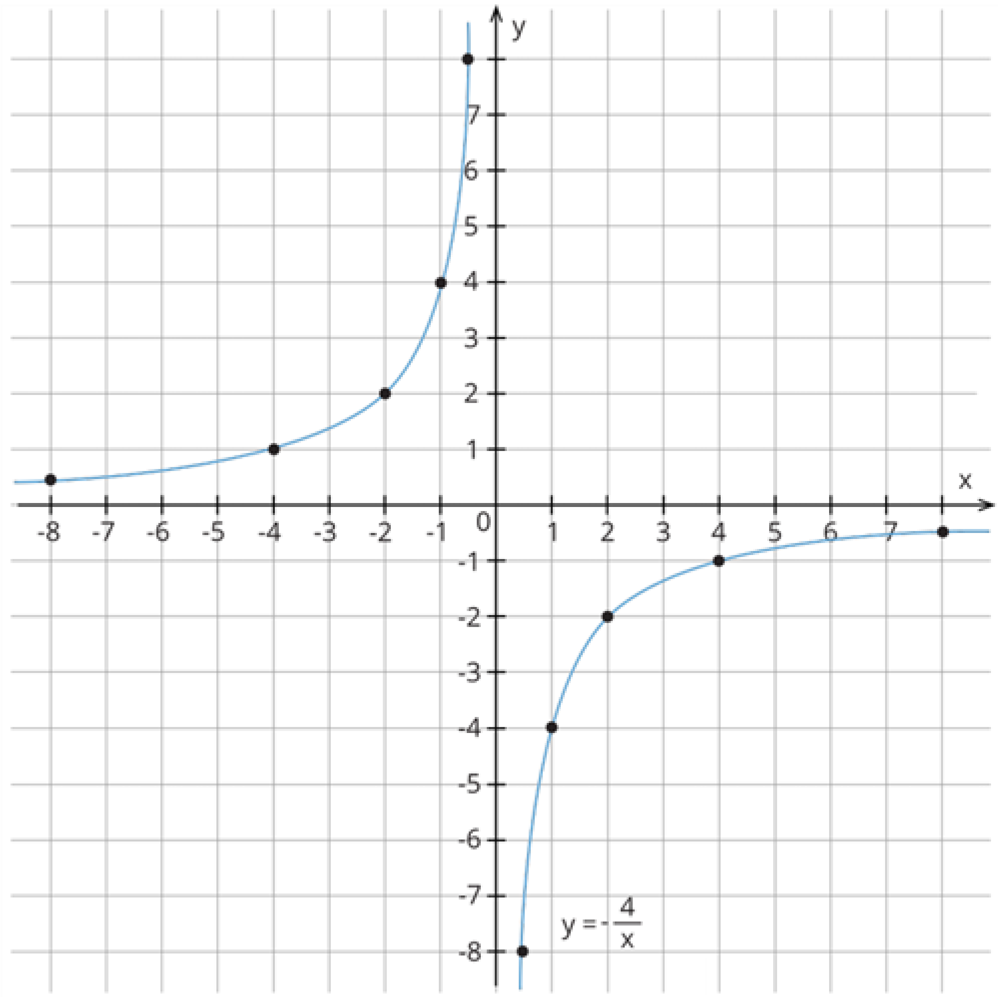
- сначала построить график функции $y=x^2$,
- затем одинаты всех точек графика умножить на 2,
- затем сдвинуть его вдоль оси OX на 1 единицу вправо,
- а затем вдоль оси OY на 4 единицы вверх:



Гипербола

График функции y=kx называют гиперболой.

Сейчас рассмотрим случай при k<0, например, при k=−4. Тогда функция задана формулой y=−4x, построим её график.
График функции y=−f(x) симметричен графику функции y=f(x) относительно оси x. Таким образом, график функции y=−4x симметричен графику y=4x относительно оси x. Получится гипербола, ветви которой находятся во II и IV координатных углах.

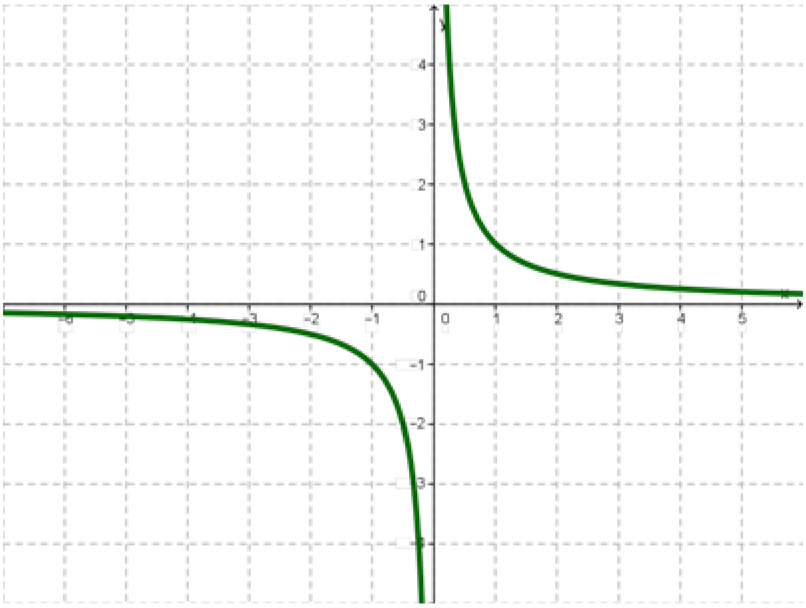


Графиком функции y=kx (k≠0) является гипербола, ветви которой находятся в I и III координатных углах при k>0, и во II и IV координатных углах при k<0.
Точка (0;0) — центр симметрии гиперболы, оси координат — асимптоты гиперболы.

Две величины x и y обратно пропорциональны, если выполняется условиеxy=k (где k — число, не равное 0), следовательно, y=kx.
Функция y=kx имеет название — обратная пропорциональность, где число k является коэффициентом обратной пропорциональности.

Свойства функции y=kx при k>0

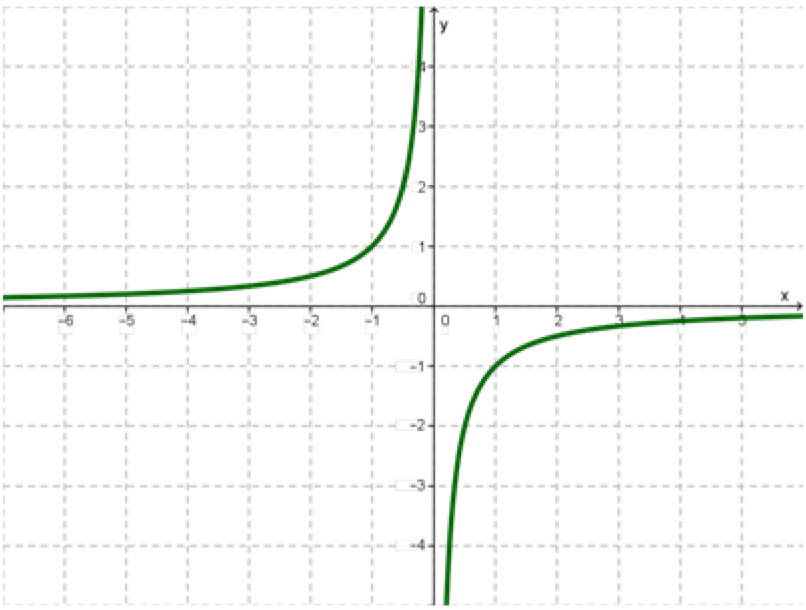
Графиком этой функции является гипербола.



1. Область определения функции — все числа, кроме нуля, то есть $x \neq 0$.
2. $y>0$ при $x>0$; $y<0$ при $x<0$.
3. Промежутки убывания: $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$.
4. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху.
5. Наименьшего значения нет; наибольшего значения нет.
6. Функция непрерывна на промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$ и имеет разрыв при $x=0$.
7. Область значений функции: $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Свойства функции $y=kx$ при $k<0$

Для описания свойств данной функции будем использовать гиперболу (её геометрическую модель).



1. Область определения функции: $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$
2. $y>0$ при $x<0$; $y<0$ при $x>0$.
3. Возрастает на $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$.
4. Снизу и сверху не ограничена.
5. Не имеет наименьшего и наибольшего значений.
6. Непрерывна на промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$.
7. Область значений функции: $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.