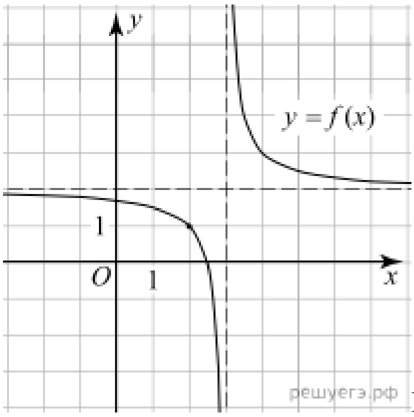
Задание 9 «Графики функций»

1. Задание 9



На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{a}{x+b}+c,$ где числа a, b и c — целые. Найдите $f(13).$

Решение.

График функции имеет горизонтальную асимптоту $y=2,$ значит, $c=2.$

График функции имеет вертикальную асимптоту $x=3,$ значит, $b=-3.$

По графику $f(2)=1,$ тогда

$$\frac{a}{2-3}+2=1 \Leftrightarrow a=1.$$

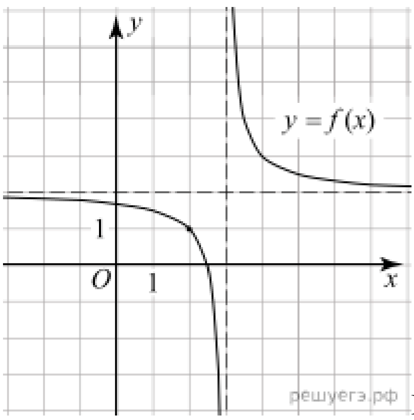
Таким образом, $f(x)=\dfrac{1}{x-3}+2.$ Найдём $f(13).$

$$f(13)=\frac{1}{13-3}+2=2,1.$$

Ответ: 2,1.

Ответ: 2,1

2. Задание 9



На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c},$ где числа a, b и c — целые. Найдите a.

Решение.

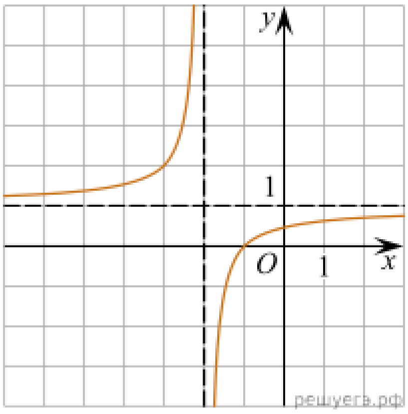
Преобразуем данную функцию:

$$f(x)=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{ax+ac+b-ac}{x+c}=\frac{ax+ac}{x+c}+\frac{b-ac}{x+c}=a+\frac{b-ac}{x+c}.$$

График функции имеет горизонтальную асимптоту $y=2,$ значит, $a=2.$

Ответ: 2.
Ответ: 2

3. Задание 9



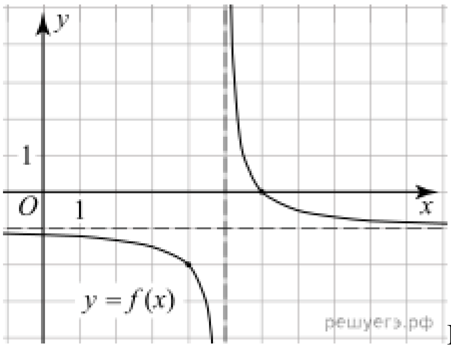
На рисунке изображён график функции вида $f(x)=a+\frac{b}{x-c},$ где числа *a*, *b* и *c* — целые. Найдите $f(-6).$

Решение.

Заметим, что асимптоты графика данной гиперболы это прямые *x* = –2 и *y* = 1, откуда *a* = 1, *c* = –2. Учитывая, что $f(-1)=0,$ получим уравнение $1+\frac{b}{-1+2}=0,$ откуда *b* = –1. Вычислим теперь $f(-6)=1-\frac{1}{-6+2}=1,25.$

Ответ: 1,25.
Ответ: 1,25

4. Задание 9



На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\frac{a}{x+b}+c,$ где числа *a*, *b* и *c* — целые. Найдите значение *x*, при котором $f(x)=-1,125.$

Решение.

График функции имеет горизонтальную асимптоту $y=-1,$ значит, $c=-1.$

График функции имеет вертикальную асимптоту $x=5,$ значит, $b=-5.$

По графику $f(6)=0,$ тогда

$$\frac{a}{6-5}-1=0\Leftrightarrow a=1.$$

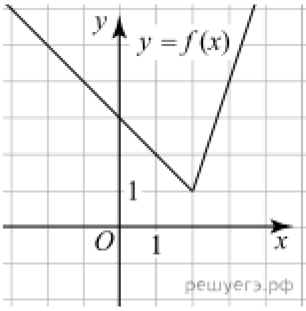
Таким образом, $f(x)=\frac{1}{x-5}-1.$ Решим уравнение $f(x)=-1,125.$

$$\frac{1}{x-5}-1=-1,125 \Leftrightarrow \frac{1}{x-5}=-\frac{1}{8} \Leftrightarrow x=-3.$$

Ответ: −3.

Ответ: -3

5. Задание 9



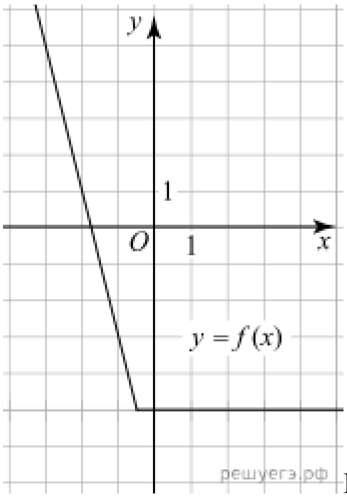
На рисунке изображён график функции вида $f(x)=ax+|bx+c|+d,$ где числа *a*, *b*, *c* и *d* — целые. Найдите корень уравнения $bx+c=0.$

Решение.

Заметим, что $|bx+c|=0$ в точке излома, т.е. при $x=2.$ Значит, корнем уравнения $bx+c=0$ является число 2.

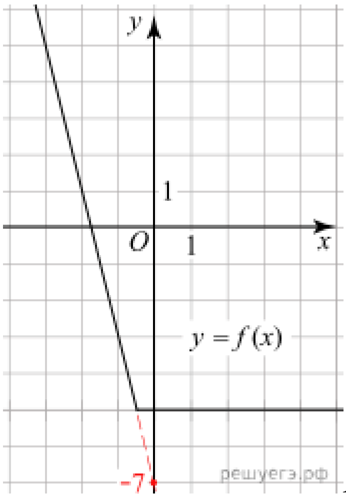
Ответ: 2

6. Задание 9



На рисунке изображён график функции вида $f(x)=ax+|bx+c|+d,$ где числа *a*, *b*, *c* и *d* — целые. Найдите корень уравнения $ax+d=0.$

Решение.



Ясно, что $b \neq 0,$ иначе $f(x) = ax + |c| + d,$ а тогда графиком функции была бы прямая. Излом графика находится в точке $x = -\frac{c}{b},$ а потому, раскрывая модуль, получаем:

$$f(x) = \begin{cases} k_1 x + l_1, & \text{при } x \geqslant -\frac{c}{b}, \\ k_2 x + l_2, & \text{при } x < -\frac{c}{b}. \end{cases}$$

Горизонтальная прямая, содержащая правую ветвь графика, задается уравнением $y = -5.$ Тангенс угла наклона левой части графика к оси абсцисс равен −4, а продолжение левой части графика пересекает ось ординат в точке −7. Поэтому

$$f(x) = \begin{cases} 0x - 5, & \text{при } x \geqslant -\frac{c}{b}, \\ -4x - 7, & \text{при } x < -\frac{c}{b}. \end{cases} \qquad (*)$$

С другой стороны, в любом из случаев раскрытия модуля получаем линейную функцию, угловой коэффициент которой $a + |b|$ или $a - |b|,$ а свободный член $d + |c|$ или $d - |c|.$ Очевидно, что $a + |b| \geqslant a - |b|,$ значит, большему значению углового коэффициента соответствует $k_1 = a + |b|,$ а меньшему — $k_2 = a - |b|.$ Аналогично большему значению свободного члена соответствует $l_1 = d + |c|,$ а меньшему соответствует $l_2 = d - |c|.$ Итак,

$$f(x) = \begin{cases} (a + |b|)x + (d + |c|), & \text{при } x \geqslant -\frac{c}{b}, \\ (a - |b|)x + (d - |c|), & \text{при } x < -\frac{c}{b}. \end{cases} \qquad (**)$$

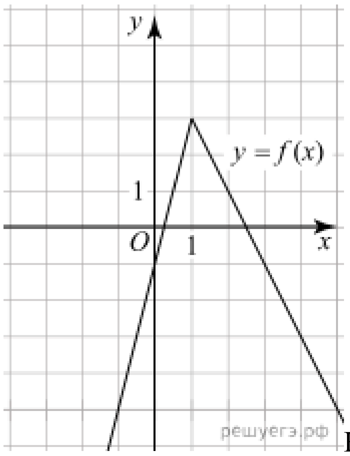
Сравнивая (□) и (□□), получаем систему уравнений: $a + |b| = 0, a - |b| = -4, d + |c| = -5, d - |c| = -7.$ Сложим первые два и последние два уравнения системы, получим $2a = -4, 2d = -12.$ Тогда $a = -2, d = -6,$ откуда для уравнения $ax + d = 0$ получаем

$$-2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Ответ: −3.

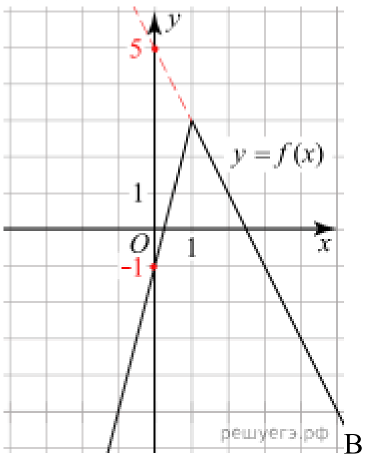
Ответ: -3

7. Задание 9



На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax - |bx + c| + d$, где числа a, b, c и d — целые. Найдите корень уравнения $ax + d = 0$.

Решение.



В любом из случаев раскрытия модуля получаем линейную функцию $f(x) = kx + l$, где угловой коэффициент $k = a + |b|$ или $k = a - |b|$, а свободный член $l = d + |c|$ или $l = d - |c|$. Очевидно, что $a + |b| \geqslant a - |b|$, значит, большему значению углового коэффициента соответствует $k = a + |b|$, а меньшему — $k = a - |b|$. Аналогично большему значению свободного члена соответствует $l = d + |c|$, а меньшему — $l = d - |c|$. По рисунку определяем, что $a + |b| = 4, a - |b| = -2, d + |c| = 5, d - |c| = -1$. Значит, $a = 1, d = 2$.

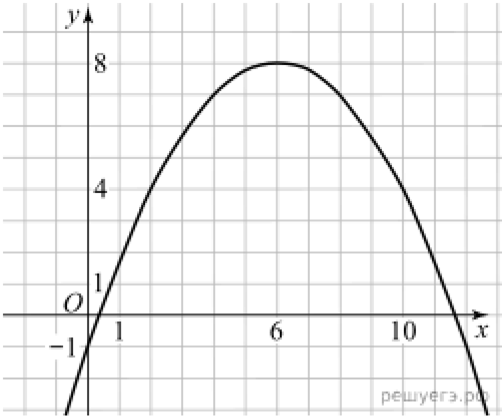
Решим уравнение $ax + d = 0$:

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Ответ: −2.

Ответ: -2

8. Задание 9



На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{x^2}{a} + bx + c,$ где числа a, b и c — целые. Найдите значение дискриминанта уравнения $f(x) = 0$.

Решение.

По рисунку определяем, что $f(x) = -\frac{(x-6)^2}{4} + 8 = -\frac{x^2}{4} + 3x - 1,$ значит, $a = -4, b = 3, c = -1.$

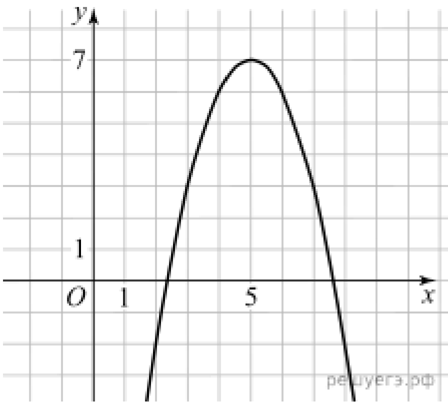
Тогда дискриминант уравнения $-\frac{x^2}{4} + 3x - 1 = 0$ равен

$$D = 3^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = 8.$$

Ответ: 8.

Ответ: 8

9. Задание 9



На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c,$ где числа a, b и c — целые. Найдите значение дискриминанта уравнения $f(x) = 0$.

Решение.

По рисунку определяем, что $f(x) = -(x-5)^2 + 7 = -x^2 + 10x - 18,$ значит, $a = -1, b = 10, c = -18.$

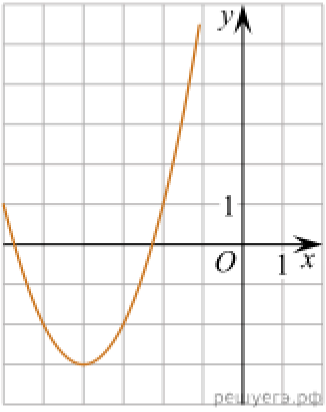
Тогда дискриминант уравнения $-x^2 + 10x - 18 = 0$ равен

$$D = 10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-18) = 28.$$

Ответ: 28.

Ответ: 28

10. Задание 9



На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c,$ где числа *a*, *b* и *c* — целые. Найдите $f(-12).$

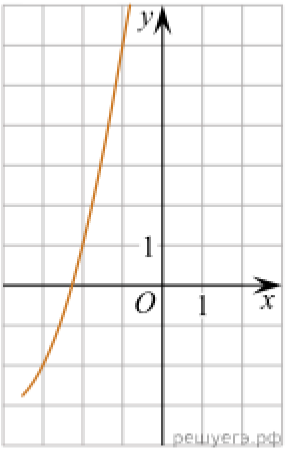
Решение.

Из рисунка видно, что вершина параболы расположена в точке $x_0 = -4,$ при этом $y_0 = f(x_0) = -3.$ Следовательно, $f(x) = a(x+4)^2 - 3,$ заметим, что $f(-3) = -2,$ откуда $a = 1,$ вычислим теперь $f(-12) = (-12+4)^2 - 3 = 61.$

Ответ: 61.

Ответ: 61

11. Задание 9



На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c,$ где числа *a*, *b* и *c* — целые. Найдите абсциссу вершины параболы.

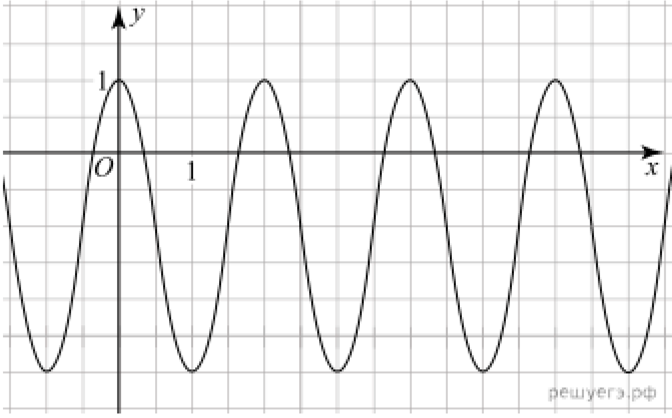
Решение.

Из рисунка видно, что $f(-3) = -2, f(-2) = 1, f(-1) = 6,$ следовательно,
$f(-3) - f(-2) = a(9-4) + b(-3+2) = 5a - b = -3,$
$f(-2) - f(-1) = a(4-1) + b(-2+1) = 3a - b = -5.$ Решая эту систему, находим $a = 1, b = 8.$ Абсцисса вершины параболы $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -4.$

Ответ: −4.

Ответ: -4

12. Задание 9



На рисунке изображён график функции вида $f(x)=a\cos(b\pi x+c)+d,$ где числа *a*, *b*, *c* и *d* — целые. Найдите $f\left(\frac{100}{3}\right).$

Решение.

По графику $f_{max}=1, f_{min}=-3,$ тогда $d=\frac{f_{max}+f_{min}}{2}=\frac{1-3}{2}=-1,$ и $|a|=\frac{f_{max}-f_{min}}{2}=\frac{1-(-3)}{2}=2.$

По графику $f(0)=1,$ тогда, если $a=-2,$ то $-2\cos c-1=1 \Leftrightarrow \cos c=-1$ — не имеет целочисленных решений, если $a=2,$ то

$$2\cos c-1=1 \Leftrightarrow \cos c=1 \Leftrightarrow c=2\pi k, k\in\mathbb{Z} \underset{c\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} c=0.$$

Значит, $a=2$ и $c=0.$

Найдём наименьший положительный период функции $f(x)=2\cos(b\pi x)-1:$

$$2\cos(b\pi x)-1=2\cos(b\pi x\pm 2\pi)-1=2\cos\left(b\pi\left(x\pm\frac{2}{b}\right)\right)-1$$

Наименьший положительный период функции $f(x)$ равен $\pm\frac{2}{b},$ а по графику наименьший положительный период равен 2, тогда $b=\pm 1.$

Таким образом, $f(x)=2\cos(-\pi x)-1=2\cos(\pi x)-1.$ Найдём $f\left(\frac{100}{3}\right).$

$$f\left(\frac{100}{3}\right)=2\cos\frac{100\pi}{3}-1=2\cos\frac{4\pi}{3}-1=-2.$$

Ответ: −2.

Ответ: -2

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	564197	2,1

2	564960	2
3	564650	1,25
4	564972	-3
5	564160	2
6	564186	-3
7	564188	-2
8	562061	8
9	562283	28
10	564646	61
11	564654	-4
12	564531	-2