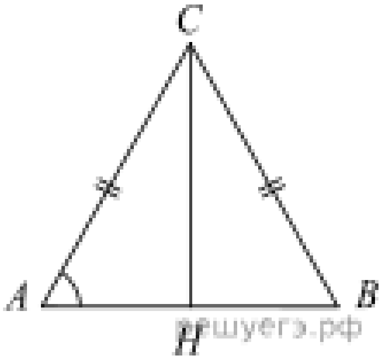
# Задание 15. Планиметрия

## Треугольник и его элементы

**1. Задание 15**



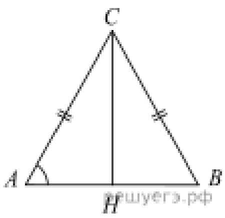

В треугольнике $ABC$ $AC = BC, AB = 8,$ $\operatorname{tg} A = \frac{33}{4\sqrt{33}}.$ Найдите $AC$.

**Решение.** Проведем высоту $CH$. Треугольник $ABC$ равнобедренный, значит, высота $CH$ делит основание $AB$ пополам.

$$AC = \frac{AH}{\cos A} = \frac{AB}{2\cos A} = \frac{AB}{2\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 A}}} = \frac{8}{2\sqrt{\frac{16}{49}}} = 7.$$

Ответ: 7.

**2. Задание 15**



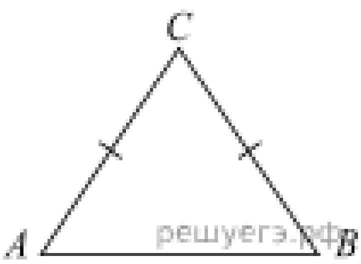

$AC = BC = 25,$ высота $CH$ равна 20. Найдите $\cos A$.

**Решение.** Вычислим:

$$\cos A = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{AC^2 - CH^2}}{AC} = \frac{\sqrt{625-400}}{25} = \frac{15}{25} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

**3. Задание 15**



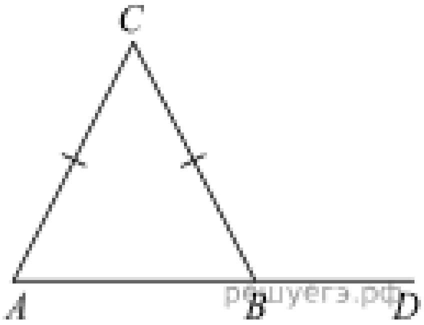

Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите площадь этого треугольника.

**Решение.** Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту, опущенную на это основание. Высота в равнобедренном треугольнике, опущенная на основание, делит равнобедренный треугольник на два равных прямоугольных треугольника. По теореме Пифагора высота будет определяться соотношением $h^2 = 25 - 9 = 16$, откуда $h = 4$. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12.$$

Ответ: 12.

**4. Задание 15**



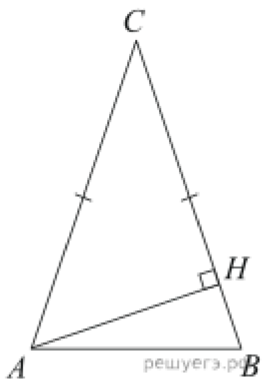

В треугольнике $ABC$ $AC = BC$. Внешний угол при вершине $B$ равен $122^\circ$. Найдите угол $C$. Ответ дайте в градусах.

**Решение.** так как треугольник $ABC$ равнобедренный, то углы при его основании равны.

$$\angle C = 180^\circ - 2\angle B = 180^\circ - 2(180^\circ - \angle CBD) = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ.$$

Ответ: 64.

**5. Задание 15**



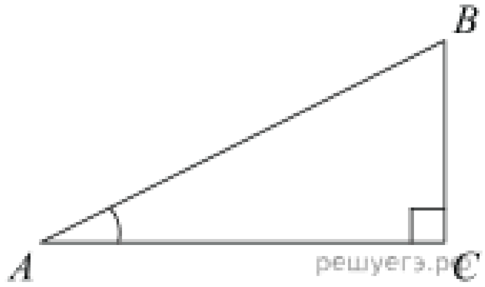

В треугольнике $ABC$ $AC = BC = 4$, угол $C$ равен $30^\circ$. Найдите высоту $AH$.

**Решение.** Вычислим:

$$AH = AC\sin C = 4\sin 30^\circ = 4\cdot\frac{1}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

**6. Задание 15**



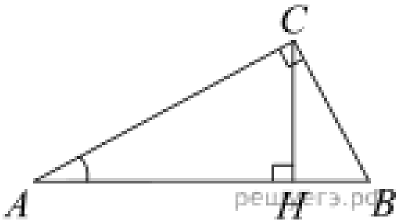

В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен $90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 2$. Найдите $sinA$.

**Решение.** Найдем $\sin A$ :

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

**7. Задание 15**



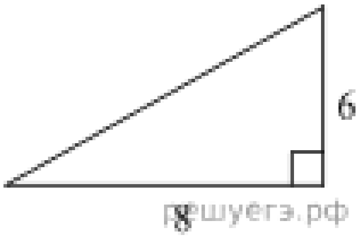
В треугольнике $ABC$ угол $ACB$ равен $90°$, $\cos A = 0{,}8$, $AC = 4$. Отрезок $CH$ — высота треугольника $ABC$ (см. рис.). Найдите длину отрезка $AH$.

**Решение.** В треугольнике $AHC$ $\cos A = \frac{AH}{AC}$, следовательно

$$AH = AC \cdot \cos A = 4 \cdot 0,8 = 3,2.$$

Ответ: 3,2.

**8. Задание 15**



Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите наибольшую среднюю линию треугольника.

**Решение.** Средняя линия в треугольнике равно половине стороны, которой она параллельна. Следовательно, наибольшая средняя линия параллельна гипотенузе и равна её половине. Длина гипотенузы равна: $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$ Значит, наибольшая средняя линия треугольник равна 5.

Ответ: 5.

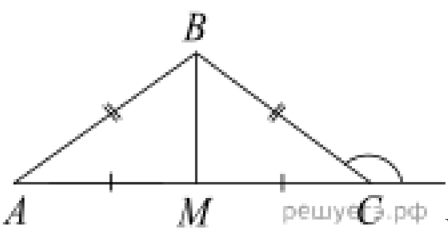
**9. Задание 15**

Прямые $m$ и $n$ параллельны (см. рисунок). Найдите $\angle 3$, если $\angle 1 = 32^\circ$, $\angle 2 = 77^\circ$. Ответ дайте в градусах.

**Решение.** Необозначенный угол треугольника и угол равны *1* как соответственные. Так как сумма углов в треугольнике равна 180°, то угол *3* будет равен 180° − 32° − 77° = 71°.

Ответ: 71.

**10. Задание 15**



В треугольнике $ABC$ $AB = BC = 24$ внешний угол при вершине $C$ равен $150^\circ$. Найдите длину медианы $BM$.

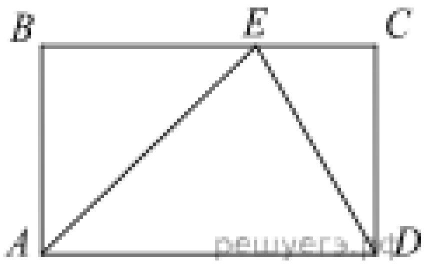
**Решение.** Найдём $\angle BCM$ он равен $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$

Против угла в 30° лежит катет равный половине гипотенузы. $BM = \frac{24}{2} = 12.$

Ответ: 12.

## Четырехугольник и его элементы

**11. Задание 15**



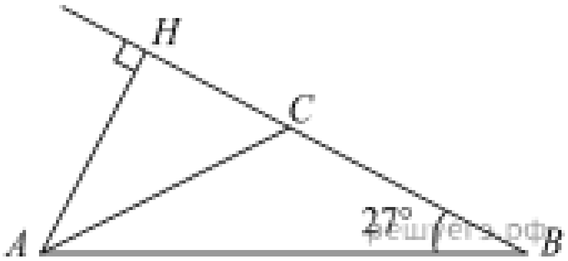

На стороне $BC$ прямоугольника $ABCD$, у которого $AB = 12$ и $AD = 17$, отмечена точка $E$ так, что треугольник $ABE$ равнобедренный. Найдите $ED$.

**Решение.** Треугольник $ABE$ равнобедренный, следовательно, $BE = AB = 12$. Найдём длину отрезка $EC: EC = BC - BE = AD - EC = 17 - 12 = 5$. По теореме Пифагора:

$$ED = \sqrt{EC^2 + CD^2} = \sqrt{25 + 144} = 13.$$

Ответ: 13.

**12. Задание 15**

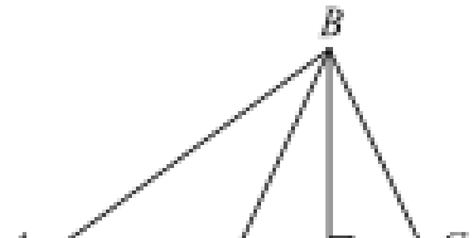



В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AB$ угол $B$ равен 27°. Найдите угол между стороной $AC$ и высотой $AH$ этого треугольника.

**Решение.** В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, поэтому угол $CAB$ равен углу $CBA$ и равен 27°. Рассмотрим треугольник $ABH$, он прямоугольный, сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, откуда $\angle BAH = 90° - 27° = 63°$. Следовательно, искомый угол $CAH$ равен $63° - 27° = 36°$.

Ответ: 36.

**13. Задание 15**




В треугольнике $ABC$ сторона $AC$ = 12, $BM$ — медиана, $BH$ — высота, $BC$ = $BM$. Найдите длину отрезка $AH$.

**Решение.** Рассмотрим треугольник $ABC$. $BM$ — медиана, по определению она делит сторону пополам, следовательно, $AM = MC$.

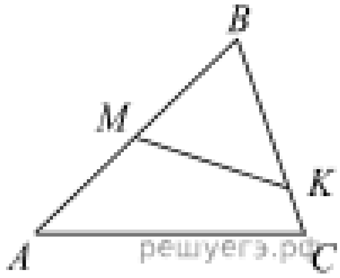
$$AC : 2 = 12 : 2 = 6 \Leftrightarrow AM = MC = 6.$$

По условию $BM$ = $BC$, значит, треугольник $MBC$ равнобедренный, а в равнобедренном треугольнике высота является биссектрисой и медианой. $BH$ является медианой и делит $MC$ пополам, следовательно, $MH$ = $HC$. Найдем $MH$: $MC$ = 6, $MH$ = 6 : 2 = 3.

$$AH = AM + MH, \ AH = 6 + 3 = 9.$$

Ответ: 9.

**14. Задание 15**




В треугольнике $ABC$ известно на сторонах $AB$ и $BC$ отмечены точки $M$ и $K$ соответственно так, что $BM : AB = 1 : 2$, а $BK : BC = 4 : 5$. Во сколько раз площадь треугольника $ABC$ больше площади треугольника $MBK$?

**Решение.** Площадь треугольника выражается формулой: $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha.$ Согласно условию: $AB = 2MB, BC = \frac{5}{4}BK.$ Тогда: $S_{MBK} = \frac{1}{2} \cdot MB \cdot BK \cdot \sin\angle B, S_{ABC} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = \frac{1}{2} \cdot 2MB \cdot \frac{5}{4}BK \cdot \sin\angle B = \frac{10}{4} \cdot S_{MBK} = 2,5 \cdot S_{MBK}$$

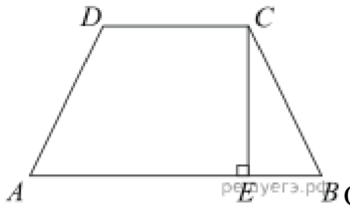
**Приведем другое решение.**

Треугольники $ABC$ и $MBK$ имеют общий угол $B$, поэтому площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих этот угол:

$$\frac{S_ABC}{S_MBK} = \frac{AB \cdot BC}{MB \cdot BK} = \frac{AB}{MB} \cdot \frac{BC}{BK} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{4} = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

**15. Задание 15**



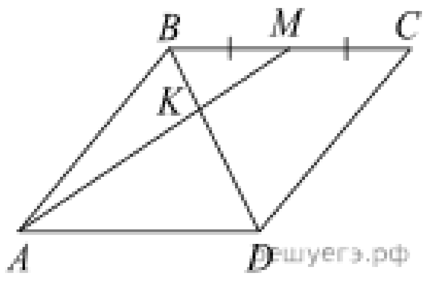

Основания равнобедренной трапеции равны 17 и 87. Высота трапеции равна 14. Найдите тангенс острого угла.

**Решение.** Вычислим:

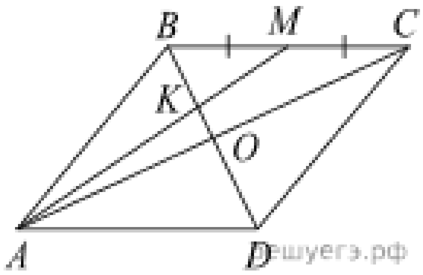
$$\operatorname{tg} B = \frac{CE}{EB} = \frac{14}{\frac{AB-DC}{2}} = \frac{14}{35} = 0,4.$$

Ответ: 0,4.

**16. Задание 15**




В параллелограмме $ABCD$ отмечена точка $M$ — середина стороны $BC$. Отрезки $BD$ и $AM$ пересекаются в точке $K$. Найдите $BK$, если $BD = 12$.

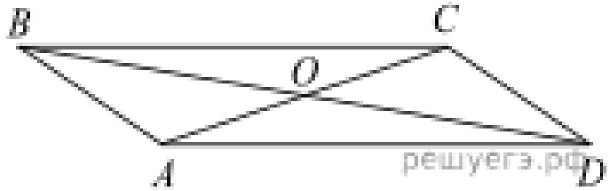



**Решение.** Обозначим $O$ точку пересечения диагоналей параллелограмма. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, поэтому $BO$ — медиана треугольника $ABC$. Отрезок $AM$также является медианой треугольника $ABC$, точкой пересечнния медианы делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. Поэтому

$$BK = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{1}{3}BD = 4.$$

Ответ: 4.

**17. Задание 15**




В параллелограмме $ABCD$ диагональ $AC$ в два раза больше стороны $AB$ и $ACD = 104^\circ$. Найдите угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

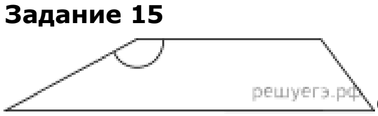
**Решение.** Пусть $O$ — точка пересечения диагоналей. Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, следовательно, $AO = OC = \frac{AC}{2} = CD.$ Следовательно, треугольник $COD$ — равнобедренный с углом при вершине равным 104°. Сумма углов треугольника равна 180°, поэтому сумма равных углов при основании треугольника $COD$ равна: $180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$. Откуда получаем: $\angle COD = \angle CDO = \frac{76^\circ}{2} = 38^\circ.$ Следовательно, острый угол между диагоналями равен 38°, а тупой угол между диагоналями равен 142°.

Ответ: 38 (или 142).

**Примечание редакции.**

Авторам задания следовало бы уточнить, какой из углов необходимо записать в ответ.

**18. Задание 15**




Основания трапеции равны 8 и 16, боковая сторона, равная 6, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции.

**Решение.** Угол в 150° образует боковая сторона и меньшее основание, тогда с большим основанием эта сторона образует угол 30°. Проведем высоту трапеции и рассмотрим прямоугольный треугольник. Из определения синуса острого угла прямоугольного треугольника получаем:

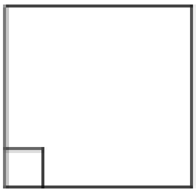
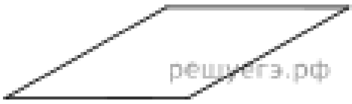
$$h = 6 \cdot \sin 30^\circ = 6 \cdot 0,5 = 3.$$

По формуле площади трапеции находим

$$S = \frac{1}{2}(8 + 16) \cdot 3 = \frac{24 \cdot 3}{2} = 36.$$

Ответ: 36.

**19. Задание 15**

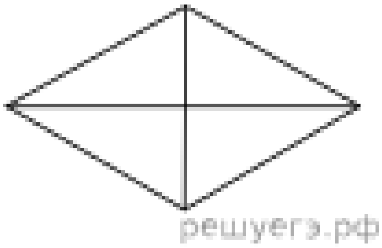


Ромб и квадрат имеют одинаковые стороны. Найдите площадь ромба, если его острый угол равен 30°, а площадь квадрата равна 64.

**Решение.** Площадь квадрата вычисляется по формуле: $S=a^2.$ Площадь ромба вычисляется по формуле: $S=a^2\cdot\sin\alpha.$ Таким образом: $S_{\text{ромба}}=S_{\text{квадрата}}\cdot\sin\alpha=64\cdot\sin30^\circ=64\cdot\frac{1}{2}=32$

Ответ: 32.

**20. Задание 15**



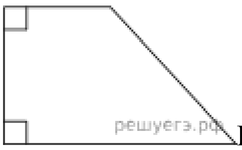


Сумма двух углов ромба равна 120°, а его меньшая диагональ равна 25. Найдите периметр ромба.

**Решение.** Сумма двух углов ромба равна 120°, значит, каждый угол равен 120° : 2 = 60°. Сумма двух остальных углов ромба равна 360° − 120° = 240°, значит, каждый из них равен 240° : 2 = 120°. Меньшая диагональ ромба лежит напротив меньшего угла ромба 60°, поэтому получаем равносторонний треугольник, основанием которого является данная диагональ. Таким образом, периметр ромба равен 25 · 4 = 100.

Ответ: 100.

**21. Задание 15**





В прямоугольной трапеции основания равны 4 и 7, а один из углов равен 135°. Найдите меньшую боковую сторону.

**Решение.** Проведём высоту трапеции. Получившийся прямоугольный треугольник является равнобедренным. Катеты этого треугольника равны $7-4=3.$ Следовательно, меньшая боковая сторона трапеции равна 3.

Ответ: 3.

**22. Задание 15**



Стороны параллелограмма равны 9 и 12. Высота, опущенная на меньшую сторону, равна 8. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.

**Решение.** Пусть $x$ — искомая высота. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, опущенную на это основание. Вычислим площадь параллелограмма двумя способами:

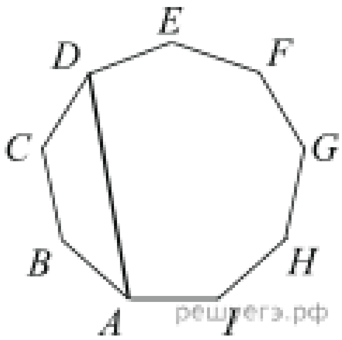
$$S=9\cdot8=12\cdot x.$$

Из полученного уравнения находим $x=6$.

Ответ: 6.

## Многоугольник

**23. Задание 15**

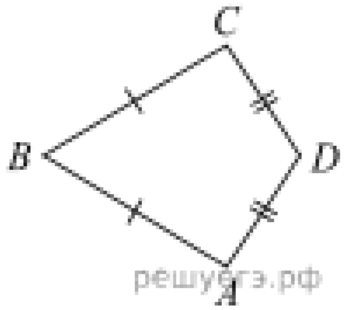



$ABCDEFGHI$ — правильный девятиугольник. Найдите угол $ADC$. Ответ дайте в градусах.

**Решение.** Угол $ADC$ вписанный и опирается на дугу $AC$, градусная мера которой равна $2 \cdot (360° : 9) = 80°$, следовательно, угол $ADC$ равен $40°$.

Ответ: 40.

**24. Задание 15**




В выпуклом четырёхугольнике ABCD известно, что $AB = BC$, $AD = CD$, $\angle B = 32°$, $\angle D = 94°$. Найдите угол $A$. Ответ дайте в градусах.

**Решение.** Проведем диагональ $AC$, получим два треугольника $BAC$ и $CAD$. Рассмотрим треугольник $BAC$, равнобедренный: угол $BAC = \angle BCA = x$, получим уравнение:

$$32 + 2x = 180 \Leftrightarrow 2x = 180 - 32 \Leftrightarrow 2x = 148 \Leftrightarrow x = \frac{148}{2} = 74.$$

Рассмотрим равнобедренный треугольник $ACD$, угол $ACD = \angle CAD = y$, составим уравнение:

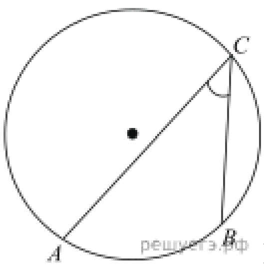
$$2y + 94 = 180 \Leftrightarrow 2y = 180 - 94 \Leftrightarrow 2y = 86 \Leftrightarrow y = 43.$$

Угол $A$ равен сумме углов $BAC$ и $CAD = 74 + 43 = 117$.

Ответ: $\angle A = 117°$.

## Окружность

**25. Задание 15**



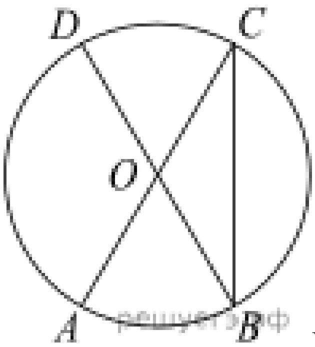

Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{5}$ окружности. Ответ дайте в градусах.

**Решение.** Вписанный угол равен половине дуги, на которую опирается. Следовательно

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 36^\circ.$$

Ответ: 36.

**26. Задание 15**



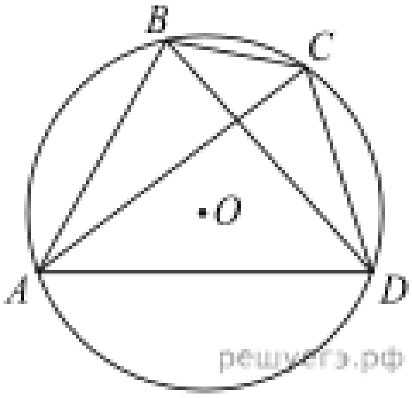

В окружности с центром $O$ $AC$ и $BD$ – диаметры. Центральный угол $AOD$ равен $110^\circ$. Найдите вписанный угол $ACB$. Ответ дайте в градусах.

**Решение.** Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности, значит

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOD) = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ.$$

Ответ: 35.

**27. Задание 15**



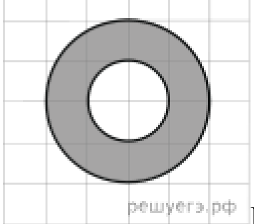

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол $ABC$ равен $105^\circ$, угол $CAD$ равен $35^\circ$. Найдите угол $ABD$. Ответ дайте в градусах.

**Решение.** Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит

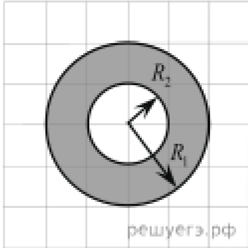
$$\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD = \frac{1}{2}(\cup ADC - \cup CD) = \frac{1}{2}(2\angle ABC - 2\angle CAD) = 70^\circ.$$

Ответ: 70.

**28. Задание 15**




Найдите (в см$^2$) площадь $S$ кольца, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

**Решение.** 

Площадь кольца равна разности площади большого и малого кругов. Радиус большого круга равен 2, а малого — 1, откуда##

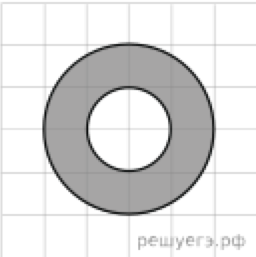
$$S = \pi 2^2 - \pi 1^2 = 3\pi.$$

Поэтому

$$\frac{S}{\pi} = 3.$$

**29. Задание 15**

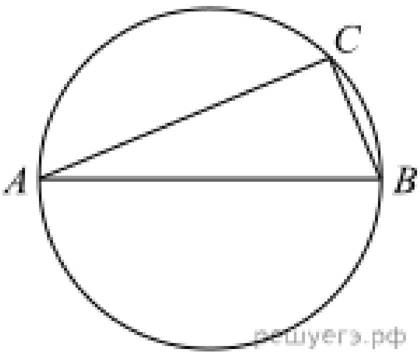
На клетчатой бумаге нарисованы два круга. Площадь внутреннего круга равна 51. Найдите площадь заштрихованной фигуры.




**Решение.** Площади кругов относятся как квадраты их радиусов. Поскольку радиус большего круга вдвое больше радиуса меньшего круга, площадь большего круга вчетверо больше площади меньшего. Следовательно, она равна 204. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площадей кругов: $204 - 51 = 153$.

Ответ: 153.

**30. Задание 15**



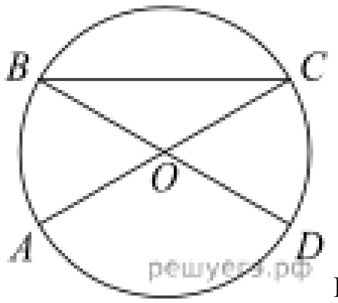
На окружности радиуса 3 взята точка $C$. Отрезок $AB$ — диаметр окружности, $AC = 2\sqrt{5}.$ Найдите $BC$.

**Решение.** Вписанный угол, опирающийся на диаметр — прямой, поэтому треугольник $ABC$ — прямоугольный. Его гипотенуза $AB$ равна 6, поэтому:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{36 - 20} = \sqrt{16} = 4.$$

Ответ: 4.

**31. Задание 15**



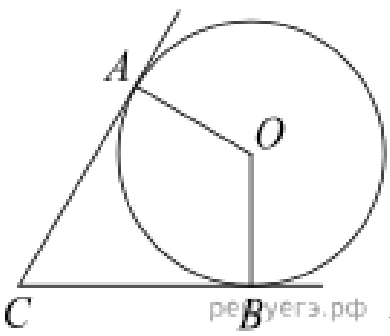
В окружности с центром $O$ $AC$ и $BD$ — диаметры. Центральный угол $AOD$ равен $130^\circ$. Найдите вписанный угол $ACB$. Ответ дайте в градусах.

**Решение.** Углы $AOD$ и $BOC$ равны как вертикальные. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности, значит

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BOC) = \frac{1}{2}\cdot 50^\circ = 25^\circ.$$

Ответ: 25.

**32. Задание 15**

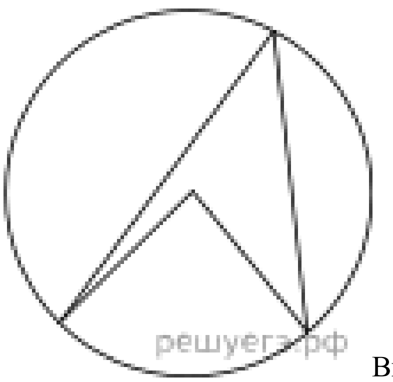


В угол $C$ величиной $83^\circ$ вписана окружность, которая касается сторон угла в точках $A$ и $B$. Найдите угол $AOB$. Ответ дайте в градусах.

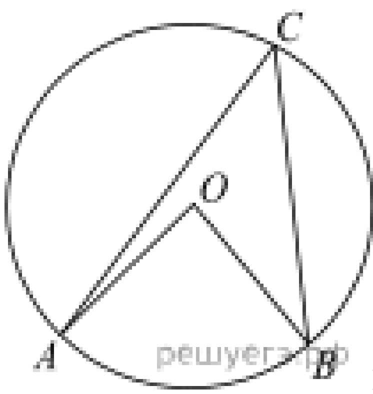
**Решение.** Угол $AOB = 180^\circ - \cup AB = 180 - 83 = 97^\circ$.

Ответ: 97.

**33. Задание 15**



Вписанный угол окружности на 42° меньше центрального угла, опирающегося на ту же дугу данной окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

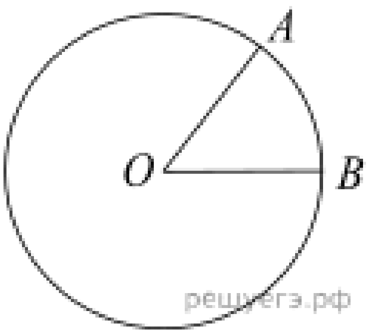


**Решение.** Введём обозначения, как показано на рисунке. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности, значит##

$$\angle ACB + 42^\circ = 2\angle ACB \Leftrightarrow \angle ACB = 42^\circ.$$

Ответ: 42.

**34. Задание 15**



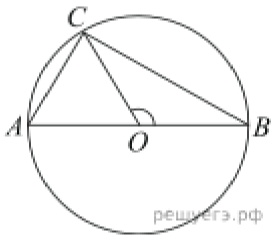

На окружности с центром $\mathrm{O}$ отмечены точки $\mathrm{A}$ и $\mathrm{B}$ так, что $\angle \mathrm{AOB} = 2^\circ$. Длина меньшей дуги $\mathrm{AB}$ равна 46. Найдите длину большей дуги.

**Решение.** Углу $\angle \mathrm{AOB} = 2^\circ$ соответствует длина дуги 46. Таким образом, углу $360^\circ - 2^\circ = 358^\circ$ соответствует длина дуги:

$$\frac{358^\circ \cdot 46}{2^\circ} = 8234$$

Ответ: 8234

**35. Задание 15**




В окружности с центром *O* проведён диаметр *AB* и на окружности взята точка *C* так, что угол *COB* равен 120°, *AC* = 50. Найдите диаметр окружности.

**Решение.** Треугольник *COA* — равносторонний, так как стороны *AO* = *OC* как радиусы окружности, а угол *COA* в нем равен 60° как смежный с углом *COB*. Тогда диаметр *AB* = 2*AC* = 100.

Ответ: 100.

## Ключ

| № п/п | № задания | Ответ |
|---|---|---|
| 1 | 27289 | 7 |
| 2 | 27309 | 0,6 |
| 3 | 27619 | 12 |
| 4 | 27747 | 64 |
| 5 | 27795 | 2 |
| 6 | 501186 | 0,5 |
| 7 | 506259 | 3,2 |
| 8 | 506338 | 5 |
| 9 | 506398 | 71 |
| 10 | 506438 | 12 |

| | | |
|---|---|---|
| 11 | 506870 | 13 |
| 12 | 509109 | 36 |
| 13 | 509680 | 9 |
| 14 | 510246 | 2,5 |
| 15 | 27444 | 0,4 |
| 16 | 506581 | 4 |
| 17 | 506683 | 38/142 |
| 18 | 509780 | 36 |
| 19 | 510137 | 32 |
| 20 | 512423 | 100 |
| 21 | 514394 | 3 |
| 22 | 514889 | 6 |
| 23 | 506830 | 40 |
| 24 | 509700 | 117 |
| 25 | 27864 | 36 |
| 26 | 27870 | 35 |
| 27 | 27874 | 70 |
| 28 | 245008 | 3 |
| 29 | 315122 | 153 |
| 30 | 506458 | 4 |
| 31 | 506498 | 25 |
| 32 | 506768 | 97 |
| 33 | 509055 | 42 |
| 34 | 510968 | 8234 |
| 35 | 512187 | 100 |