Иррациональные уравнения

Иррациональными называются уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня.

Иррациональное уравнение, как правило, сводится к равносильной системе, содержащей уравнения и неравенства.

1. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Из двух систем выбирают ту, которая решается проще.

2. $\sqrt{f(x)} = a$

Если а < 0, уравнение не имеет корней.

Если $a \geqslant 0$, уравнение равносильно уравнению $f(x) = a^2$.

3. $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

Иррациональные уравнения могут быть также решены путем возведения обеих частей уравнения в натуральную степень. При возведении уравнения в степень могут появится посторонние корни. Поэтому необходимой частью решения иррационального уравнения является проверка.

Рекомендации к теме

При решении иррациональных уравнений, как правило, используют следующие методы:
1) переход к равносильной системе (в этом случае проверка не нужна);
2) метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень;
3) метод введения новых переменных.

Если вы не следите за равносильностью переходов, то **проверка является обязательным элементом решения**. О.Д.З. в иррациональных уравнениях не поможет Вам отсеять все посторонние корни. Обратите на это внимание!

Примеры.

1. $\sqrt{3 - x} = \sqrt{x^2 - 5x - 2}$

Решение:

$$\sqrt{3 - x} = \sqrt{x^2 - 5x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = x^2 - 5x - 2, \\ 3 - x \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 0, \\ x \leqslant 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -1, \end{array} \right. \\ x \leqslant 3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ x = -1

Ответ: -1.

2. $\sqrt{3x+7} = x - 7$

Решение:

$$\sqrt{3x+7} = x - 7 \quad <=> \quad \begin{cases} 3x + 7 = (x-7)^2 \\ x - 7 \geqslant 0 \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} 3x + 7 = x^2 - 14x + 49 \\ x \geq 7 \end{cases} \quad <=>$$

$$<=> \quad \begin{cases} x^2 - 17x + 42 = 0 \\ x \geq 7 \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 14 \\ x = 3 \end{array}\right. \\ x \geq 7 \end{cases} <=> x = 14$$

Ответ: 14.

3. $\sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} = 4$

Решение: ОДЗ:

$$\begin{cases} x \quad 2 \geqslant 0, \\ 10 - x \geqslant 0, \end{cases} <=> \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 10, \end{cases} <=> 2 \leqslant x \leqslant 10$$

$$\sqrt{x-2} = 4 - \sqrt{10-x}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x - 2 = 16 - 8\sqrt{10-x} + 10 - x,$$
$$8\sqrt{10-x} = 28 - 2x \;\Big|\; : 2,$$
$$4\sqrt{10-x} = 14 - x.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$16(10 - x) = 196 - 28x + x^2$$
$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

x = 6 входит в ОДЗ, значит может быть корнем данного уравнения.

Проверка:

$$\sqrt{6-2} + \sqrt{10-6} = 4$$
$$2 + 2 = 4$$
$$4 = 4 \text{ – верно}$$

Ответ: 6

4. $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \cdot (x^2 - 2x - 1) = 0$

Решение: ОДЗ

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$
$$x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю.

1) $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0;$
$x^2 - 5x + 6 = 0;$

$x_1 = 2$; $x_2 = 3$. Эти корни входят в ОДЗ.

2) $x^2 - 2x - 1 = 0$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$x = 1 - \sqrt{2}$ - входит в ОДЗ

$x = 1 + \sqrt{2}$ - не входит в ОДЗ

Ответ: $1 - \sqrt{2}$; 2; 3

5. $x - 3 + 4\sqrt{x-3} - 3 = 12.$

Решение: ОДЗ: $x - 3 \geq 0;\ x \geq 3.$

Обозначим $\sqrt{x-3} = y$. Тогда $x-3=y^2$.

$y^2 + 4y - 12 = 0;$

$y_1 = -6$, $y_2 = 2$.

а) $\sqrt{x-3} = -6$. Решений нет, т.к. -6>0, а $\sqrt{x-3} \geq 0$.

б) $\sqrt{x-3} = 2$,
x - 3 = 4,
x = 7 входит в ОДЗ.

Ответ: 7.