Логарифмические уравнения

При решении логарифмических уравнений и неравенств пользуются свойствами логарифмов, а также свойствами логарифмической функции

$y=\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$:

1) Область определения: $x > 0$;

2) Область значений: $y \in \boldsymbol{R}$;

3) $\log_a x_1=\log_a x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$;

4) При $a>1$ функция $y=\log_a x$ возрастает, при $0 < a < 1$ функция $y=\log_a x$ убывает при всех $x > 0$, т.е.

$a >1$ и $\log_a x_1>\log_a x_2 \Leftrightarrow x_1>x_2$,
$0 < a < 1$ и $\log_a x_1>\log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$;

При переходах от логарифмических уравнений (неравенств) к уравнениям (неравенствам), не содержащим знака логарифма, следует учитывать область допустимых значений (ОДЗ) исходного уравнения (неравенства).

Рекомендации к теме

При решении логарифмических уравнений во многих случаях приходится использовать свойства логарифма произведения, частного, степени. В тех случаях, когда в одном логарифмическом уравнении имеются логарифмы с различными основаниями, применение указанных свойств возможно лишь после перехода к логарифмам с равными основаниями.

Кроме того, решение логарифмического уравнения следует начинать с нахождения области допустимых значений (О.Д.З.) заданного уравнения, т.к. в процессе решения возможно появление посторонних корней. Завершая решение, не забудьте проверить найденные корни на принадлежность О.Д.З. Решать логарифмические уравнения можно и без использования О.Д.З**. В этом случае проверка является обязательным элементом решения.**

Определение

$\log_a x = n \Rightarrow x = a^n$

Область допустимых значений

$y = \log_a x \Rightarrow x > 0; a > 0; a \neq 1$

Частные случаи

$\ln x = \log_e x$ — натуральный логарифм

$\lg x = \log_{10} x$ — десятичный логарифм

Примеры

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_2 64 = 6 \Leftrightarrow 64 = 2^6$

$\log_3 27 = 3 \Leftrightarrow 27 = 3^3$

$\log_9 81 = 2 \Leftrightarrow 81 = 9^2$

Операции с логарифмами

$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

$\log_{(a^k)} x = \frac{1}{k} \cdot \log_a x$

$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}, c > 0, c \neq 1$

$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ — частный случай

Переход к логарифму

$n = \log_a a^n$

$a = b^{\log_b a}$

Примеры.

Решить уравнения:

а) $\log_3(5x - 1) = 2$.

Решение:

ОДЗ: $5x - 1 > 0$; $x > 1/5$.
$\log_3(5x - 1) = 2$,
$\log_3(5x - 1) = \log_3 3^2$,
$5x - 1 = 9$,
$x = 2$.

Ответ: 2.

б) $\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = 3$.

Решение:

ОДЗ:
$\begin{cases} x - 5 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}, x \in (5; +\infty)$

$\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = 3$,
$\log_2((x - 5)(x + 2)) = \log_2 2^3$,
$(x - 5)(x + 2) = 8$,
$x^2 - 3x - 18 = 0$,
$x_1 = 6 \in (5; +\infty)$;
$x_2 = -3 \notin (5; +\infty)$,

следовательно, x= -3 - посторонний корень.

Ответ: 6.

в) $\log_2 x - 2 \log_x 2 = -1$

Решение:

ОДЗ: $x > 0,\ x \neq 1$

Используя формулу перехода к новому основанию, получим

$\log_2 x - 2\dfrac{\log_2 2}{\log_2 x} = -1,$

$\log_2 x - \dfrac{2}{\log_2 x} = -1.$

Обозначим

$\log_2 x = y.$

$y - \dfrac{2}{y} = -1,$

$\dfrac{y^2 + y - 2}{y} = 0,$

$\begin{cases} y^2 + y - 2 = 0, \\ y \neq 0 \end{cases}$

$y_1 = -2;\ y_2 = 1.$

а) $\log_2 x = -2;\ x = 2^{-2};\ x = \dfrac{1}{4}.$

б) $\log_2 x = 1;\ x = 2.$

Ответ: $\dfrac{1}{4};\ 2.$