Показательные уравнения

Показательными называются уравнения, в которых неизвестное содержится в показателе степени. Простейшее показательное уравнение имеет вид: $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x - неизвестное.

Основные свойства степеней, при помощи которых преобразуются показательные уравнения: $a>0$, $b>0$.

1. $a^0 = 1$, $a^1 = a$.
2. $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, где m и n– натуральные числа.
3. $a^{-n} = 1/ a^n$
4. $a^n \times a^m = a^{n+m}$
5. $a^n/a^m = a^{n-m}$
6. $(a^n)^m = a^{n-m}$
7. $(ab)^n = a^n \times b^n$
8. $(a/b)^n = a^n/b^n$.

При решении показательных уравнений пользуются также следующими свойствами показательной функции: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$:

1. $a^x>0$, при всех $a>0$ и $x \in$ **R;**
2. $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Для представления числа в виде степени используют основное логарифмическое тождество: $b = a^{\log_a b}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Примеры.

1. Уравнения, сводящиеся к простейшим. Решаются приведением обеих частей уравнения к степени с одинаковым основанием.

$3^x = 9^{x-2}$.

Решение:

$3^x = (3^2)^{x-2}$;
$3^x = 3^{2x-4}$;
$x = 2x - 4$;
$x = 4$.

Ответ: 4.

2. Уравнения, решаемые с помощью вынесения за скобки общего множителя.

$3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = 24$.

Решение:

$3^x - 3^{x-2} = 24$
$3^{x-2}(3^2 - 1) = 24$
$3^{x-2} \times 8 = 24$
$3^{x-2} = 3$
$x - 2 = 1$
$x = 3.$

Ответ: 3.

3. Уравнения, решаемые с помощью замены переменной.

$4^x + 2^x = 12.$

Решение:

$2^{2x} + 2^x - 12 = 0$
Обозначаем $2^x = y$.
$y^2 + y - 12 = 0$
$y_1 = -4$; $y_2 = 3$.
а) $2^x = -4$.Уравнение не имеет решений, т.к. $2^x > 0$.
б) $2^x = 3$; $2^x = 2^{\log_2 3}$; $x = \log_2 3$.

Ответ: $\log_2 3$.

4. Уравнения, содержащие степени с двумя различными (не сводящимися друг к другу) основаниями.

$3 \times 2^{x+1} - 2 \times 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}.$

Решение:

$3 \times 2^{x+1} - 2^{x-2} = 5^x - 2 \times 5^{x-2}$
$2^{x-2} \times 23 = 5^{x-2}$
$\times 23$
$2^{x-2} = 5^{x-2}$
$(5/2)^{x-2} = 1$
$x - 2 = 0$
$x = 2.$

Ответ: 2.

5. Уравнения, однородные относительно a^x и b^x.

Общий вид: $\alpha \cdot a^{2x} + \beta \cdot a^x \cdot b^x + \gamma \cdot b^{2x} = 0$.

$9^x + 4^x = 2{,}5 \times 6^x.$

Решение:

$3^{2x} - 2{,}5 \times 2^x \times 3^x + 2^{2x} = 0 \quad |: 2^{2x} > 0$
$(3/2)^{2x} - 2{,}5 \times (3/2)^x + 1 = 0.$
Обозначим $(3/2)^x = y$.
$y^2 - 2{,}5y + 1 = 0,$

$y_1 = 2$; $y_2 = ½$.

а) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2, \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}} 2}, x = \log_{\frac{3}{2}} 2$

б) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}}, x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} = -\log_{\frac{3}{2}} 2$

Ответ: $\log_{3/2}2$; - $\log_{3/2}2$.