

Рациональные уравнения

Рациональное выражение — это алгебраическое выражение, которое состоит из чисел и переменной x , а также операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с натуральным показателем.

Если $r(x)$ — рациональное выражение, то уравнение $r(x)=0$ называют *рациональным уравнением*.

Напомним, когда дробь равна нулю: $a/b=0$ — тогда, и только тогда, когда сразу удовлетворены два условия:

1. числитель дроби равен нулю ($a=0$);
2. знаменатель дроби отличен от нуля: $b \neq 0$.

Ход решения рационального уравнения

1. Переносим все члены уравнения в левую часть.
2. Преобразовываем левую часть уравнения к виду алгебраической дроби $p(x)q(x)$.
3. Решаем уравнение $p(x)=0$.
4. Для каждого корня уравнения $p(x)=0$ выполняем проверку: удовлетворяет ли он условию $q(x) \neq 0$ или нет. Если выполняет, тогда это корень заданного уравнения; если не выполняет, то это посторонний корень, в ответ его не включаем.

Пример 1

$$\frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = 0 \quad \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 = 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$a=2 \ b=-3 \ c=-5$$

$$D=b^2-4ac=9+40=49$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{3 + 7}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{3 - 7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$x \neq -1$, число -1 является посторонним корнем.

Ответ : 2,5



Пример 2

Решить уравнение $\frac{3x}{x-2} + \frac{6}{2-x} = x$

Общий знаменатель равен $x - 2$.

Умножив обе части на общий знаменатель, получим

$$\begin{aligned}3x - 6 &= x(x - 2), \\3x - 6 &= x^2 - 2x.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 6 &= 0, \\x_1 &= 2, \quad x_2 = 3.\end{aligned}$$

При $x = 2$, $x - 2 = 0$.

При $x = 3$, $x - 2 \neq 0$.

Ответ 3