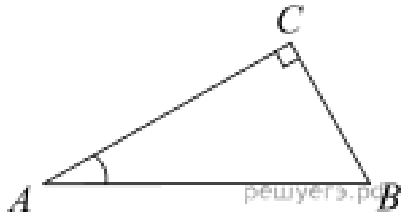
Задание 3. Планиметрия

1. Задание 3



В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC=2,$ $\sin A=\dfrac{\sqrt{17}}{17}.$ Найдите BC.

Решение. Имеем:

$$BC=AC\operatorname{tg}A=\frac{AC\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}}{\sqrt{1-\frac{17}{289}}}=$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\frac{17}{\sqrt{272}}=2\cdot\sqrt{\frac{1}{16}}=2\cdot\frac{1}{4}=0,5.$$

Ответ: 0,5.

Приведем решение Алишера Простова.

Найдем косинус угла A:

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right)^2}=\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Найдем гипотенузу AB:

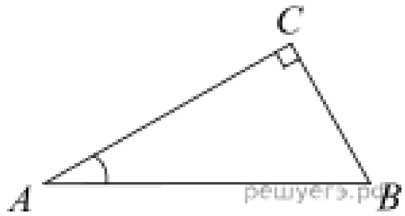
$$AB=\frac{AC}{\cos A}=\frac{2}{\frac{4}{\sqrt{17}}}=\frac{\sqrt{17}}{2}.$$

По теореме Пифагора найдем BC:

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2-2^2}=\sqrt{\frac{17-16}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=0,5.$$

2. Задание 3



В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC=4,8,$ $\sin A=\dfrac{7}{25}.$ Найдите AB.

Решение. Имеем:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{AC}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{4,8}{\sqrt{1-\frac{49}{625}}} = 4,8 \cdot \frac{25}{24} = 5.$$

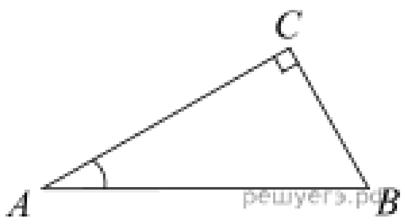
Ответ: 5.

3. Задание 3

В треугольнике *ABC* угол *C* равен $90^\circ, AC = 18, \sin A = \frac{3}{5}$. Найдите *BC*.

Решение.

Это задание ещё не решено, приводим решение прототипа.



В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, $AC = 2, \sin A = \frac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите BC.

Имеем:

$$BC = AC\,\mathrm{tg}A = \frac{AC\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}}{\sqrt{1-\frac{17}{289}}} =$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\frac{17}{\sqrt{272}} = 2\cdot\sqrt{\frac{1}{16}} = 2\cdot\frac{1}{4} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

Приведем решение Алишера Простова.

Найдем косинус угла *A*:

$$\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Найдем гипотенузу *AB*:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{2}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

По теореме Пифагора найдем *BC*:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} =$$

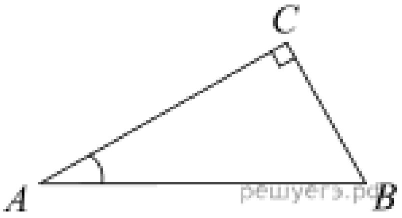
$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{17-16}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0,5.$$

4. Задание 3

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 24$, $\sin A = \frac{3}{5}$. Найдите BC.

Решение.

Это задание ещё не решено, приводим решение прототипа.



В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 2$, $\sin A = \frac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите BC.

Имеем:

$$BC = AC\,\mathrm{tg}A = \frac{AC\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}}{\sqrt{1-\frac{17}{289}}} =$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\frac{17}{\sqrt{272}} = 2\cdot\sqrt{\frac{1}{16}} = 2\cdot\frac{1}{4} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Приведем решение Алишера Простова.

Найдем косинус угла A:

$$\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Найдем гипотенузу AB:

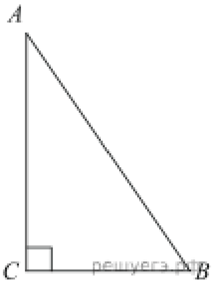
$$AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{2}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

По теореме Пифагора найдем BC:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{17-16}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0{,}5.$$

5. Задание 3



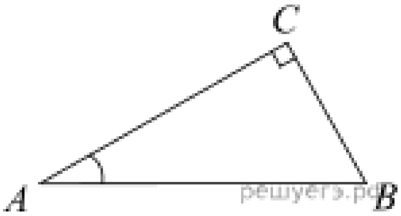
В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 6$, $tgA = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Найдите AB.

Решение. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{AC^2 + (AC\,\mathrm{tg}A)^2} =$$
$$= AC\sqrt{1 + (\mathrm{tg}A)^2} = 6 \cdot \sqrt{\frac{4+5}{4}} = 9.$$

Ответ: 9.

6. Задание 3



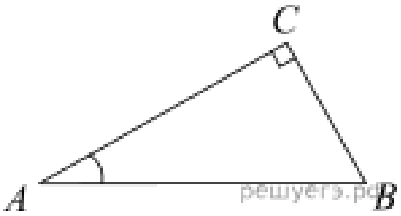
В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 4$, $\cos A = 0,5$. Найдите AB.

Решение. По определению косинуса:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{4}{0,5} = 8.$$

Ответ: 8.

7. Задание 3



В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\mathrm{tg}A = \frac{33}{4\sqrt{33}}$, $AC = 4$. Найдите AB.

Решение. Имеем:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 A}}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{1}{1+\frac{33}{16}}}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{49}{16}} = 7.$$

Ответ: 7.

Приведем другое решение:

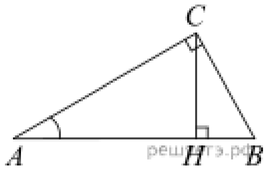
Найдем BC:

$$BC = AC \cdot \mathrm{tg}A = 4 \cdot \frac{33}{4\sqrt{33}} = \sqrt{33}.$$

По теореме Пифагора найдем AB:

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{16+33}=\sqrt{49}=7.$$

8. Задание 3



В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $BC=3,$ $\sin A=\frac{1}{6}.$ Найдите AH.

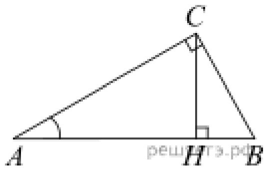
Решение. Имеем:

$$AH=AC\cos A=\frac{BC}{\operatorname{tg} A}\cdot\cos A=$$

$$=\frac{BC\cos^2 A}{\sin A}=\frac{BC(1-\sin^2 A)}{\sin A}=\frac{3\left(1-\frac{1}{36}\right)}{\frac{1}{6}}=17,5.$$

Ответ: 17,5.

9. Задание 3



В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $BC=5,$ $\cos A=\frac{7}{25}.$ Найдите BH.

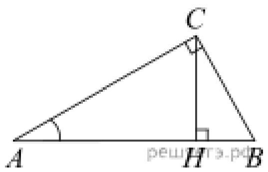
Решение. Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$BH=BC\sin\angle HCB=BC\sin A=$$

$$=BC\sqrt{1-\cos^2 A}=5\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2}=5\cdot\frac{24}{25}=4,8.$$

Ответ: 4,8.

10. Задание 3



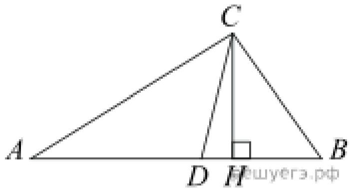
В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, $BC=4\sqrt{5},$ $BH=4.$ Найдите $\operatorname{tg} A.$

Решение. Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$\operatorname{tg} A=\operatorname{tg}\angle HCB=\frac{HB}{CH}=\frac{HB}{\sqrt{CB^2-HB^2}}=\frac{4}{\sqrt{80-16}}=0,5.$$

Ответ: 0,5.

11. Задание 3



Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен $61°$. Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

Решение. Имеем:

$$\angle DCH = \angle C - \angle ACD - \angle BCH =$$
$$= \angle C - \frac{\angle C}{2} - (90° - \angle B) =$$
$$= 90° - 45° - (90° - 61°) = 90° - 45° - 29° = 16°.$$

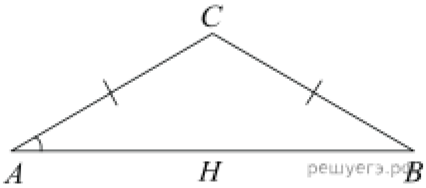
Ответ: 16.

12. Задание 3

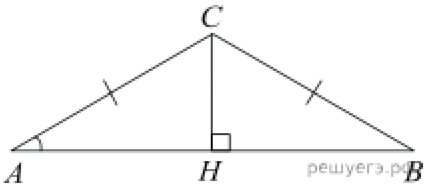
В треугольнике ABC $AC = BC = 12, \sin B = \frac{4}{5}.$ Найдите $AB.$

Решение.

Это задание ещё не решено, приводим решение прототипа.



В треугольнике ABC $AC = BC = 5, \sin A = \frac{7}{25}.$ Найдите AB.



Треугольник ABC равнобедренный, поэтому высота CH делит основание AB пополам. Тогда

$$AB = 2AH = 2AC\cos A = 2AC\sqrt{1-\sin^2 A} =$$

$$= 2\cdot 5\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = 10\cdot\frac{24}{25} = 9{,}6.$$

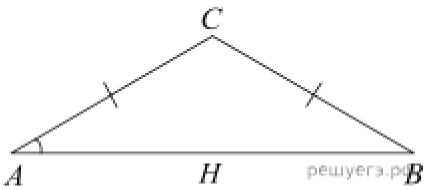
Ответ: 9,6.

13. Задание 3

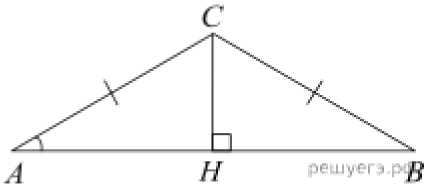
В треугольнике ABC $AC = BC = 18, \sin B = \frac{\sqrt{15}}{4}.$ Найдите $AB.$

Решение.

Это задание ещё не решено, приводим решение прототипа.



В треугольнике ABC $AC = BC = 5$, $\sin A = \dfrac{7}{25}$. Найдите AB.



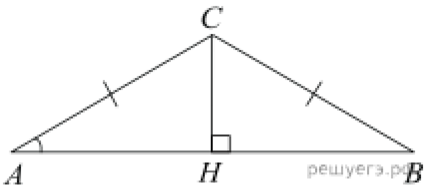
Треугольник ABC равнобедренный, поэтому высота CH делит основание AB пополам. Тогда

$$AB = 2AH = 2AC\cos A = 2AC\sqrt{1-\sin^2 A} =$$

$$= 2\cdot 5\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = 10\cdot\frac{24}{25} = 9,6.$$

Ответ: 9,6.

14. Задание 3



В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 30$, $\sin A = 0,8.$ Найдите AC.

Решение. Проведем высоту CH. Треугольник ABC равнобедренный, значит, высота CH делит основание AB пополам. Тогда

$$AC = \frac{AH}{\cos A} = \frac{AB}{2\cos A} =$$

$$= \frac{AB}{2\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{30}{2\sqrt{1-\frac{64}{100}}} = \frac{30\cdot 10}{2\cdot 6} = 25.$$

<

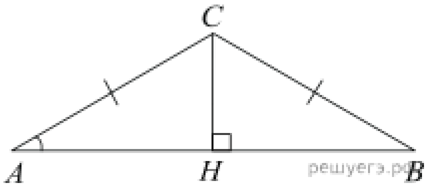
Ответ: 25.

15. Задание 3

В треугольнике ABC $AC = BC, AB = 6, \sin A = 0,8.$ Найдите AC.

Решение.

Это задание ещё не решено, приводим решение прототипа.



В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 9,6$, $\sin A = \dfrac{7}{25}$. Найдите AC.

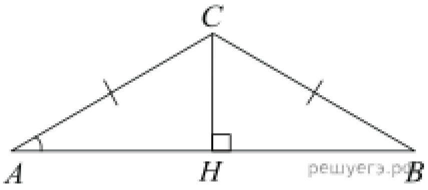
Треугольник ABC равнобедренный, значит, высота CH делит основание AB пополам. Тогда

$$AC = \frac{AH}{\cos A} = \frac{AB}{2\cos A} =$$

$$= \frac{AB}{2\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{9,6}{2\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2}} = \frac{4,8\cdot 25}{24} = 5.$$

Ответ: 5.

16. Задание 3



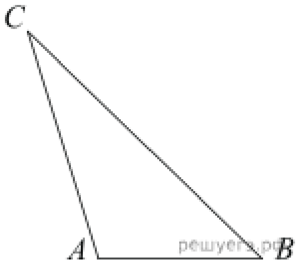
В треугольнике ABC $AC = BC = 8$, $\cos A = 0,5$. Найдите AB.

Решение. Треугольник ABC равнобедренный, поэтому высота CH делит основание AB пополам. Тогда

$$AB = 2AH = 2AC\cos A = 2\cdot 8\cdot \frac{1}{2} = 8.$$

Ответ: 8.

17. Задание 3



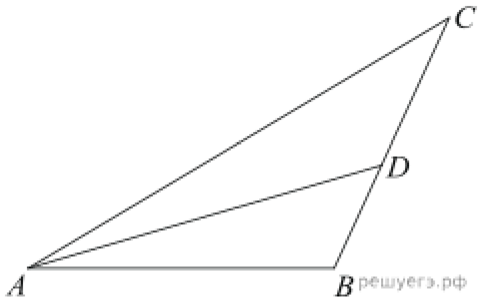
Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 30°.

Решение. Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними. Поэтому

$$S = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot \frac{1}{2} = 24.$$

Ответ: 24.

18. Задание 3

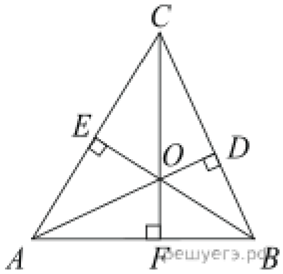


В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 30°, угол BAD равен 22°. Найдите угол ADB. Ответ дайте в градусах.

Решение. Поскольку AD — биссектриса $\angle CAD = \angle BAD = 22^\circ$. Угол ADB является внешним углом треугольника ADC, поэтому он равен сумме двух не смежных с ним углов: $\angle ADB = \angle CAD + \angle ACD = 52^\circ$.

Ответ: 52.

19. Задание 3

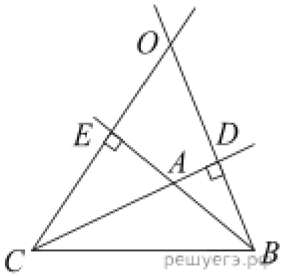


В треугольнике ABC угол A равен $60°$, угол B равен $82°$. AD, BE и CF — высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOF. Ответ дайте в градусах.

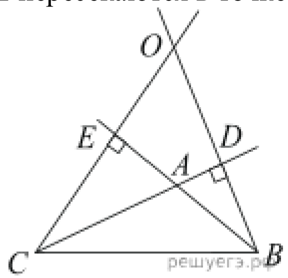
Решение. Угол между высотами равен углу между сторонами, к которым они проведены: $AOF = \angle B = 82^\circ$.

Ответ: 82.

20. Задание 3



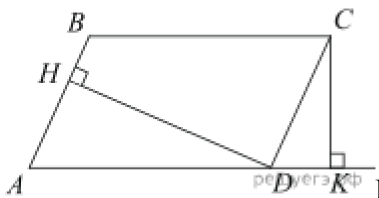
В треугольнике ABC угол A равен $135°$. Продолжения высот BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.



Решение. Угол между прямыми равен углу между перпендикулярами к ним, поэтому $\angle DOE = \angle CAE = 180° - \angle CAB = 45°$.

Ответ: 45.

21. Задание 3



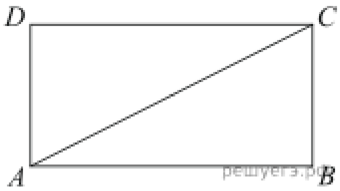
В параллелограмме $ABCD$ $AB = 3$, $AD = 21$, $\sin A = \dfrac{6}{7}$. Найдите большую высоту параллелограмма.

Решение. Большая высота проведена к меньшей стороне. Имеем:

$$DH = AD \sin A = 21 \cdot \frac{6}{7} = 3 \cdot 6 = 18.$$

Ответ: 18.

22. Задание 3

 Периметр прямоугольника равен 28, а диагональ равна 10. Найдите площадь этого прямоугольника.

Решение. Периметр прямоугольника равен сумме длин его сторон. Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Пусть одна из сторон прямоугольника равна a, вторая равна b. Периметр прямоугольника будет соответственно равен $P = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 28$. Диагональ образует в прямоугольнике два прямоугольных треугольника. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = 100$. Тогда имеем:

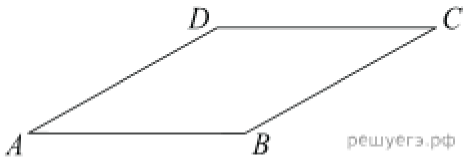
$$\begin{cases} a+b=14, \\ a^2+b^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ (a+b)^2-(a^2+b^2)=196-100 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ 2ab=96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ ab=48. \end{cases}$$

Тем самым, $S = a \cdot b = 48$.

Ответ: 48.

23. Задание 3



Площадь ромба равна 6. Одна из его диагоналей в 3 раза больше другой. Найдите меньшую диагональ.

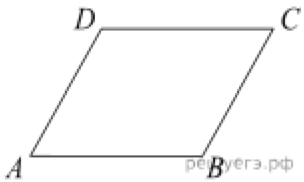
Решение. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Пусть меньшая из диагоналей равна a, тогда большая равна $3a$. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 3a = 6.$$

Поэтому $a = 2.$

Ответ: 2.

24. Задание 3



Периметр параллелограмма равен 46. Одна сторона параллелограмма на 3 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

Решение. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны, значит,

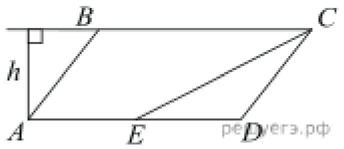
$$P = 2(AD + AB) = 2(AD + AD + 3) = 4AD + 6.$$

Зная, что периметр параллелограмма равен 46, находим $AD = 10$.

Ответ: 10.

25. Задание 3

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 189. Точка E — середина стороны AD. Найдите площадь трапеции $AECB$.



Решение. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту:

$$S_{\text{п}} = AD \cdot h.$$

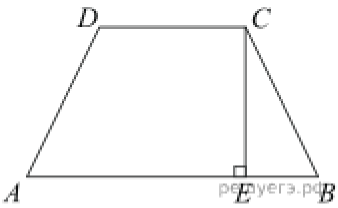
Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту. Выразим площадь трапеции через площадь параллелограмма:

$$S_{ABCE} = \frac{1}{2}(AE + BC) \cdot h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AD + AD\right)h =$$

$$= \frac{3}{4}AD \cdot h = \frac{3}{4}S_{ABCD} = \frac{3}{4} \cdot 189 = 141,75.$$

Ответ: 141,75.

26. Задание 3



Основания равнобедренной трапеции равны 51 и 65. Боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.

Решение. Пусть CE — высота

$$EB = \frac{AB - DC}{2} = 7.$$

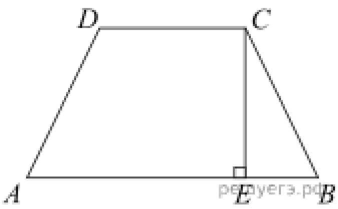
По теореме Пифагора находим: $CE = \sqrt{CB^2 - EB^2} = 24.$

Тогда

$$\sin B = \frac{CE}{CB} = \frac{24}{25} = 0,96.$$

Ответ: 0,96.

27. Задание 3



Большее основание равнобедренной трапеции равно 34. Боковая сторона равна 14. Синус острого угла равен $\frac{2\sqrt{10}}{7}$. Найдите меньшее основание.

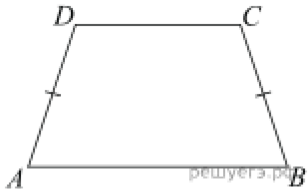
Решение. Заметим, что $CD = AB - 2EB = AB - 2CB\cos A =$

$$= AB - 2CB\sqrt{1 - \sin^2 A} =$$

$$= 34 - 2 \cdot 14\sqrt{1 - \frac{40}{49}} = 34 - 12 = 22.$$

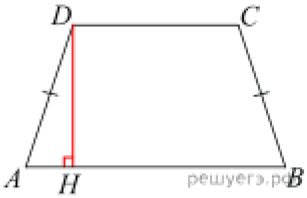
Ответ: 22.

28. Задание 3



Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.

Решение.



Трапеция равнобедренная, значит,

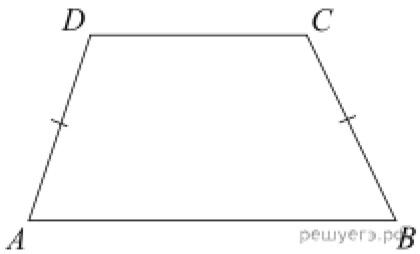
$$AH = \frac{AB - DC}{2} = 6$$ и $$AD = \frac{P_{ABCD} - (AB + DC)}{2} = 10.$$

Тогда, по теореме Пифагора $$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 8.$$

$$S = \frac{AB + CD}{2} \cdot DH = 20 \cdot 8 = 160.$$

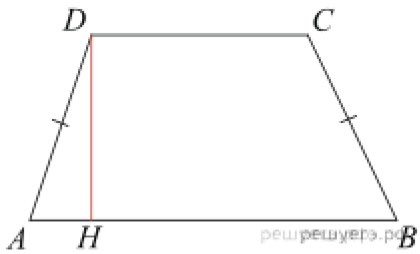
Ответ: 160.

29. Задание 3



Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее боковые стороны равны 10. Найдите площадь трапеции.

Решение.



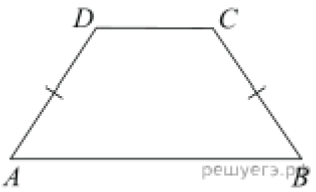
$$AH = \frac{AB - CD}{2} = \frac{26 - 14}{2} = 6,$$

Откуда, $$S = \frac{(AB + CD) \cdot DH}{2} =$$

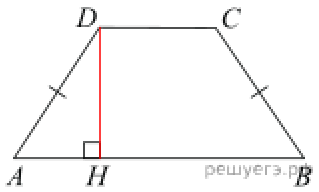
$$= \frac{(AB + CD) \cdot \sqrt{AD^2 - AH^2}}{2} = \frac{40 \cdot 8}{2} = 160.$$

Ответ: 160.

30. Задание 3



В равнобедренной трапеции большее основание равно 25, боковая сторона равна 10, угол между ними 60°. Найдите меньшее основание.

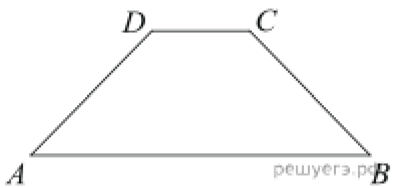
Решение. 

Проведем высоту DH.

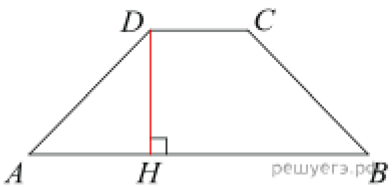
$$DC = AB - 2AH = AB - 2AD\cos A = 25 - 20\cdot\frac{1}{2} = 15.$$

Ответ: 15.

31. Задание 3



Основания равнобедренной трапеции равны 15 и 9, один из углов равен 45°. Найдите высоту трапеции.

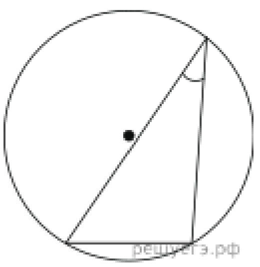
Решение. 

Проведем высоту DH.

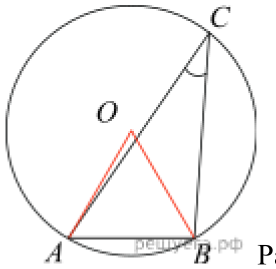
$$DH = AH\cdot \operatorname{tg} A = \frac{AB - DC}{2}\cdot \operatorname{tg} A = \frac{15-9}{2}\cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 3.$$

Ответ: 3.

32. Задание 3



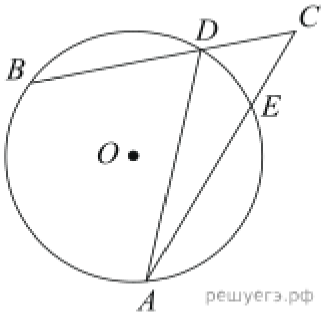
Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в градусах.



Решение. Рассмотрим треугольник AOB. Он равносторонний, так как $AO = OB = AB = R$. Поэтому угол AOB = 60. Вписанный угол ACB равен половине дуги, на которую он опирается. Тем самым, он равен 30°.

Ответ: 30.

33. Задание 3



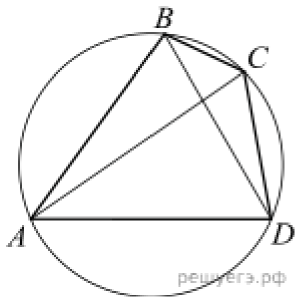
Найдите угол ACB, если вписанные углы ADB и DAE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 118° и 38°. Ответ дайте в градусах.

Решение. Угол между двумя секущими равен полуразности высекаемых ими дуг:

$$\angle ACB = \frac{\cup AB - \cup DE}{2} = \frac{118^\circ - 38^\circ}{2} = 40^\circ.$$

Ответ: 40.

34. Задание 3



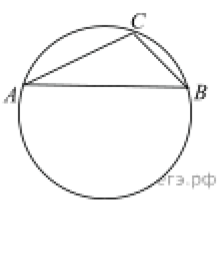
Угол ABD равен 53°. Угол BCA равен 38°. Найдите вписанный угол BCD. Ответ дайте в градусах.

Решение. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности равны, поэтому $\angle ABD = \angle ACD = 53^\circ.$

Следовательно, $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 38^\circ + 53^\circ = 91^\circ.$

Ответ: 91.

35. Задание 3



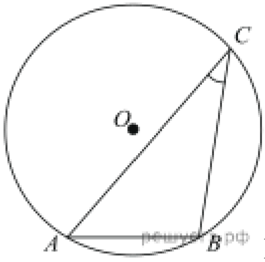
В треугольнике ABC сторона AB равна $3\sqrt{2}$, угол C равен 135°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

Решение. Воспользуемся теоремой синусов:

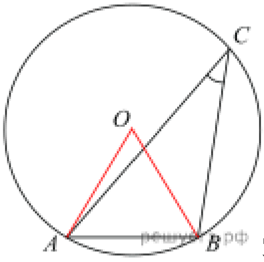
$$\frac{AB}{\sin\angle C}=2R\Leftrightarrow R=\frac{AB}{2\sin\angle C}=\frac{3\sqrt{2}}{2\sin 135^\circ}=3.$$

Ответ: 3.

36. Задание 3



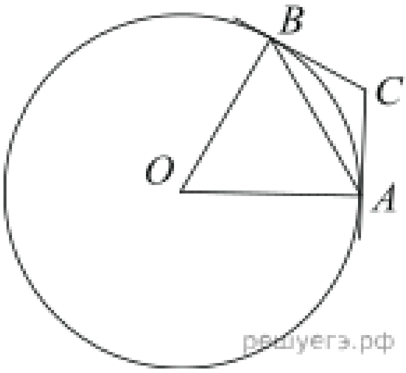
Найдите хорду, на которую опирается угол 30°, вписанный в окружность радиуса 3.



Решение. Заметим, что $\angle ACB=30^\circ$. Значит, $\angle AOB=60^\circ$, т. к. является центральным углом, опирающимся на ту же хорду. Соответственно, треугольник AOB — равносторонний, так как $AO = OB = AB = R = 3$.

Ответ: 3.

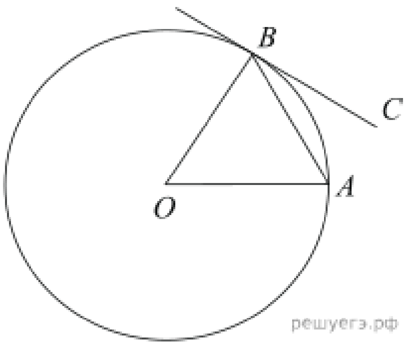
37. Задание 3



Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Угол CAB равен 32°. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

Решение. Угол между касательной и хордой, проведённой в точку касания, измеряется половиной дуги, заключённой между его сторонами. Поэтому величина меньшей дуги AB окружности равна 64°. Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается, поэтому угол AOB равен 64°.

Ответ: 64.



Примечание об изменении задания.

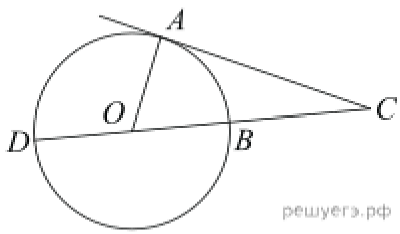
Ранее это задание и аналогичные к нему в Открытом банке были формулированы иначе.

Задание. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 32°. Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой AB. Ответ дайте в градусах.

Решение. Угол между касательной и хордой, проведённой в точку касания, измеряется половиной дуги, заключённой между его сторонами. Значит, искомая величина дуги равна 64°.

Ответ: 64.

38. Задание 3

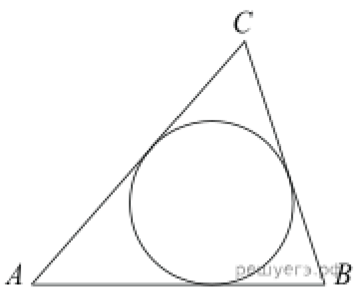


Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O — центр окружности, сторона CO пересекает окружность в точках B и D, а дуга AD окружности, заключенная внутри этого угла, равна 116°. Ответ дайте в градусах.

Решение. Заметим, что DB — диаметр окружности, поэтому дуга AB, не содержащая точки D, равна $180° - 116° = 64°$. На эту дугу опирается центральный угол AOB, поэтому он равен 64°. Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательным, поэтому треугольник AOC прямоугольный. Тогда $\angle ACO = 90^\circ - \angle COA = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ.$

Ответ: 26.

39. Задание 3



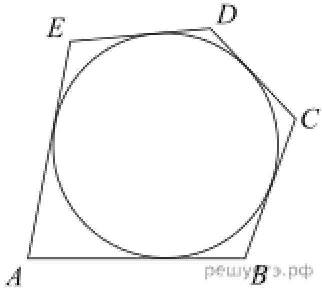
Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.

Решение. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра (p) на радиус вписанной окружности (r):

$$S = pr = 6 \cdot 1 = 6.$$

Ответ: 6.

40. Задание 3



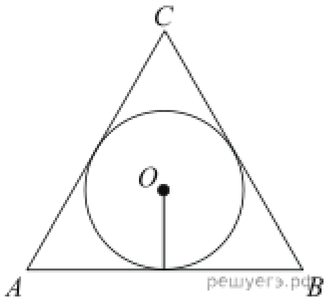
Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, периметр которого равен 20. Найдите его площадь.

Решение. Радиус вписанной в многоугольник окружности равен отношению его площади к полупериметру. Пусть площадь равна S, полупериметр равен p, радиус окружности равен R. Тогда

$$S = Rp = 3 \cdot \frac{20}{2} = 30.$$

Ответ: 30.

41. Задание 3



Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Решение. Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению площади к полупериметру:

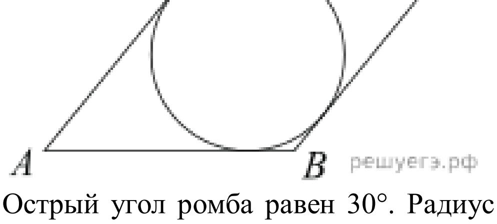
$$r = \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AB^2 \sin A}{\frac{3AB}{2}} = \frac{\sqrt{3}\sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

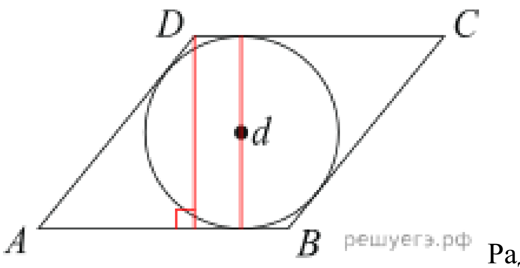
Примечание

Другой способ решения состоит в использовании формулы, выражающей радиус вписанной окружности в равносторонний треугольник через его сторону: $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

42. Задание 3



Острый угол ромба равен 30°. Радиус вписанной в этот ромб окружности равен 2. Найдите сторону ромба.

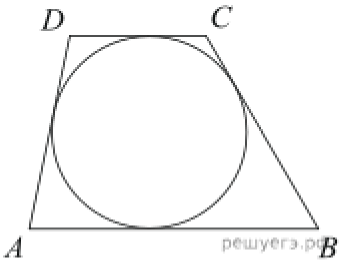


Решение. Радиус r вписанной в ромб окружности вдвое меньше его высоты d. Поэтому

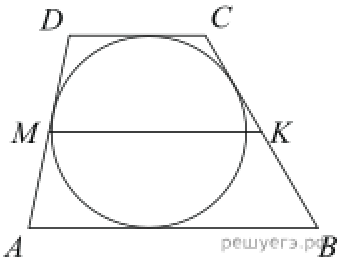
$$AD = \frac{DH}{\sin A} = \frac{d}{\sin A} = \frac{2r}{\sin A} = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 8.$$

Ответ: 8.

43. Задание 3



Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40. Найдите длину её средней линии.

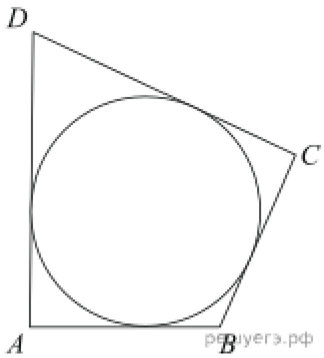


Решение. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD,$

$$MK = \frac{DC + AB}{2} = \frac{P_{ABCD}}{4} = 10.$$

Ответ: 10.

44. Задание 3



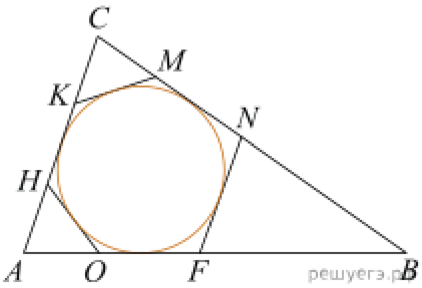
Периметр четырехугольника, описанного около окружности, равен 24, две его стороны равны 5 и 6. Найдите большую из оставшихся сторон.

Решение. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны. В этом случае периметр четырехугольника вдвое больше суммы длин противоположных сторон, следовательно, в данном четырехугольнике сумма длин противоположных сторон равна 12, а значит, стороны длиной 5 и 6 не могут быть противоположными и являются смежными.

Напротив стороны длиной 5 лежит сторона длиной $12-5=7$. Напротив стороны длиной 6 лежит сторона длиной $12-6=6$. Большая из этих двух сторон имеет длину 7.

Ответ: 7.

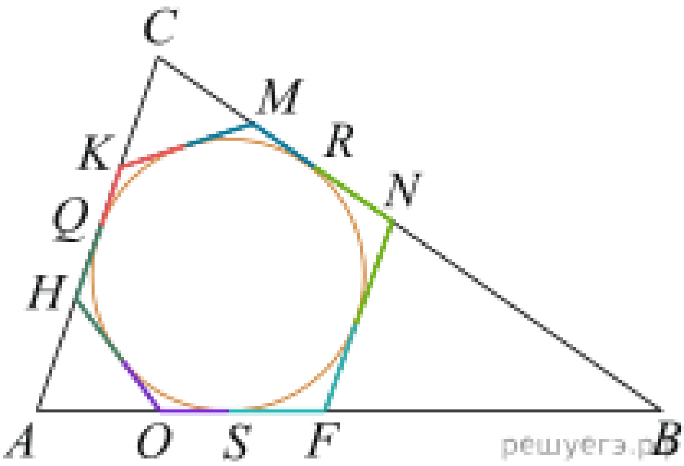
45. Задание 3



К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.

Решение. Покажем, что сумма периметров отсеченных треугольников равна сумме длин сторон треугольника ABC, то есть равна его периметру. Отрезки касательных, проведенных к окружности из точек K, H, O, F, N, M соответственно равны друг другу (см. рис., равные отрезки выделены одинаковыми цветами). Поэтому

$$P_{CKM}=CQ+CR,\quad P_{AHO}=AQ+AS,\quad P_{BFN}=BS+BR.$$



Сложим правые части полученных равенств:

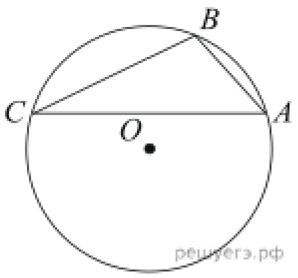
$$(CQ+CR)+(AQ+AS)+(BS+BR)=$$
$$=AB+BC+AC=P_{ABC}.$$

Следовательно,

$$P_{ABC}=P_{AOH}+P_{KCM}+P_{FNB}=24.$$

Ответ: 24.

46. Задание 3



Точки A, B, C, расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные величины которых относятся как $1:3:5$. Найдите больший угол треугольника ABC. Ответ дайте в градусах.

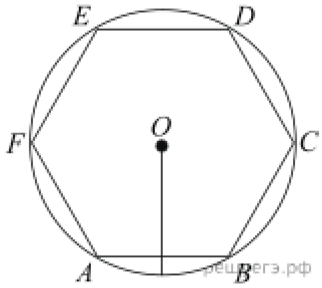
Решение. Пусть меньшая часть окружности равна x, тогда

$$x+3x+5x=360^\circ \Leftrightarrow x=40^\circ.$$

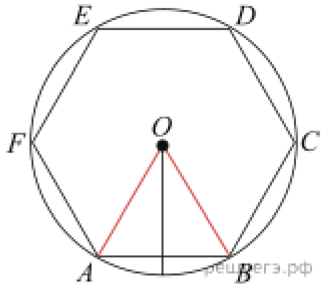
Больший угол опирается на большую дугу; вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. Следовательно, искомый угол равен половине от $5 \cdot 40°$ или $100°$.

Ответ: 100.

47. Задание 3



Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 6?

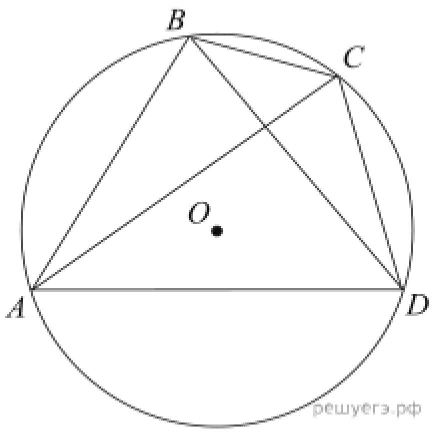


Решение. Заметим, что $\angle AOB = \frac{360°}{6} = 60°.$ Значит, треугольник AOB — равносторонний. Тогда

$$AB = AO = R = 6.$$

Ответ: 6.

48. Задание 3



Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 110°, угол ABD равен 70°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.

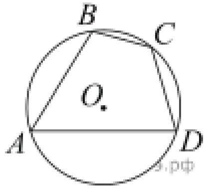
Решение. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, следовательно,

$$\angle CAD = \frac{1}{2} \cup CD =$$

$$= \frac{1}{2}(\cup ADC - \cup AD) = \angle ABC - \angle ABD = 40°.$$

Ответ: 40.

49. Задание 3



Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 82° и 58°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

Решение. Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°. Больший из оставшихся углов лежит напротив меньшего из указанных в условии. Поэтому он равен $180° - 58° = 122°$.

Ответ: 122.

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	27239	0,5
2	27238	5
3	4653	13,5
4	4663	18
5	502013	9
6	27240	8
7	27242	7
8	27268	17,5
9	27272	4,8
10	27338	0,5
11	27770	16
12	19987	14,4
13	19985	.
14	19929	25
15	19931	5
16	27286	8
17	27591	24
18	27759	52
19	27779	82
20	510796	45
21	27436	18
22	27605	48
23	27616	2
24	27809	10
25	317338	141,75

26	27439	0,96
27	27441	22
28	27631	160
29	27635	160
30	27833	15
31	27837	3
32	27857	30
33	27885	40
34	525131	91
35	541371	3
36	27858	3
37	27878	64
38	27883	26
39	27624	6
40	27640	30
41	27909	0,5
42	27914	8
43	27937	10
44	27940	7
45	27943	24
46	27868	100
47	27906	6
48	27876	40
49	27927	122