1. Задание 6

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=6t^2-48t+17$ (где x— расстояние от точки отсчета в метрах, t— время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t=9$ с.

Решение.

Найдем закон изменения скорости:

$\upsilon(t)=x'(t)=12t-48.$

При $t=9$ с имеем:

$$\upsilon(9)=12\cdot 9-48=60 \text{ м/с.}$$

Ответ: 60.

2. Задание 6

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^3-3t^2+2t$ (где x— расстояние от точки отсчета в метрах, t— время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t=6$ с.

Решение.

Найдем закон изменения скорости:

$$\upsilon(t)=x'(t)=\frac{3}{2}t^2-6t+2 \text{ м/с.}$$

Тогда находим:

$$\upsilon(6)=\frac{3}{2}\cdot 36-6\cdot 6+2=20 \text{ м/с.}$$

Ответ: 20.

3. Задание 6

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-t^4+6t^3+5t+23$ (где x— расстояние от точки отсчета в метрах, t— время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t=3$ с.

Решение.

Найдем закон изменения скорости: $\upsilon(t)=x'(t)=-4t^3+18t^2+5$ м/с. При $t=3$ имеем:

$$\upsilon(3)=-4\cdot 3^3+18\cdot 9+5=59 \text{ м/с.}$$

Ответ: 59.

4. Задание 6

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2-13t+23$ (где x— расстояние от точки отсчета в метрах, t— время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

Решение.

Найдем закон изменения скорости:

$$\upsilon(t)=x'(t)=2t-13 \text{ м/с.}$$

Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 3 м/с, решим уравнение:

$$2t-13=3\Leftrightarrow 2t=16\Leftrightarrow t=8 \text{ с.}$$

Ответ: 8.

Примечание.

В условии и под законом движения, и под скоростью авторами подразумеваются проекции, а не модули векторов. Пожалуй, стоило бы указать на это более четко. Чтобы не возникало разночтений, задание можно было бы сформулировать так: «Материальная точка движется прямолинейно вдоль оси Ox. Скалярная проекция радиус-вектора этой точки на ось Ox зависит от времени по закону $x(t)=t^2-13t+23$, где x— расстояние от начала отсчета O в метрах, t— время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) скалярная проекция вектора скорости на ось Ox была равна 3 м/с?». Полагаем, такая формулировка отпугнула бы непосвященных.

5. Задание 6

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2-5t+3$ (где x— расстояние от точки отсчета в метрах, t— время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

Решение.

Найдем закон изменения скорости: $\upsilon(t)=x'(t)=t^2-6t-5$ м/с. Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 2 м/с, решим уравнение:

$$t^2-6t-5=2\Leftrightarrow t^2-6t-7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1; \\ t=7 \end{array}\right. \underset{t>0}{\Leftrightarrow} t=7 \text{ с.}$$

Ответ: 7.

6. Задание 6

Прямая $y=7x-5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+6x-8$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y=7x-5$ их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y'=7$:

$(x^2+6x-8)'=\ 7\Leftrightarrow 2x+6=7\Leftrightarrow x=0,5.$

Ответ: 0,5.

7. Задание 6

Прямая $y=-4x-11$ является касательной к графику функции $y=x^3+7x^2+7x-6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Условие касания графика функции $y=f(x)$ и прямой $y=kx+b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x)=k,\\ f(x)=kx+b.\end{cases}$$

В нашем случае имеем:

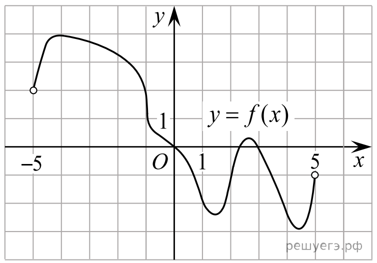
$$\begin{cases} 3x^2+14x+7=-4,\\ x^3+7x^2+7x-6=-4x-11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+14x+11=0,\\ x^3+7x^2+11x+5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{11}{3},\\ x=-1,\end{array}\right.\\ x^3+7x^2+11x+5=0\ (*).\end{cases}$$

Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Поэтому искомая абсцисса точки касания −1.

Ответ: −1.

8. Задание 6

На рисунке изображен графикфункции $y = f(x)$, определенной на интервале (−5; 5). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=6$ или совпадает с ней.



Решение.

Поскольку касательная параллельна прямой $y=6$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны 0. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. У данной функции производная равна нулю только в точках экстремума функции. На заданном интервале функция имеет 2 максимума и 2 минимума, итого 4 экстремума. Таким образом, касательная к графику функции параллельна прямой $y=6$ или совпадает с ней в 4 точках.

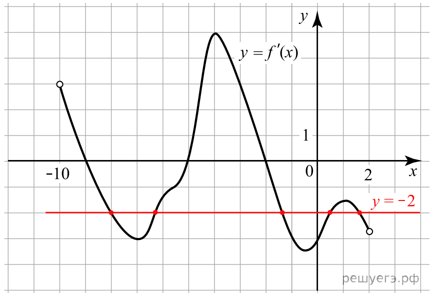
Ответ: 4.

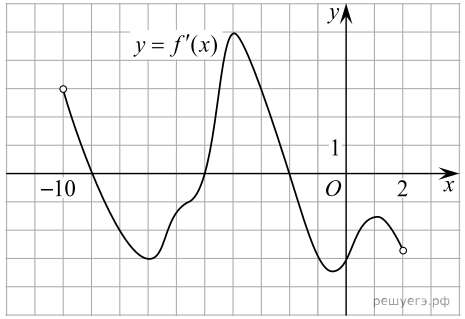
9. Задание 6

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−10;2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой $y=-2x-11$ или совпадает с ней.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку



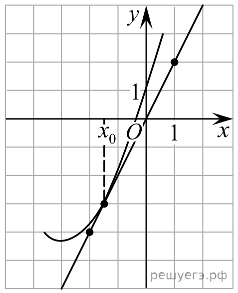


касательная параллельна прямой $y=-2x-11$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны –2. Найдем количество точек, в которых $f'(x)=-2$, это соответствует количеству точек пересечения графика производной с прямой $y=-2$. На данном интервале таких точек 5.

Ответ: 5.

10. Задание 6

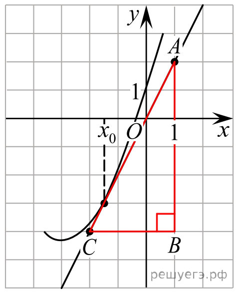
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A(1;2), B(1;−4), C(−2;−4). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу *ACB*:

$$y'(x_0)=\mathrm{tg}\angle ACB=\frac{AB}{BC}=\frac{2+4}{1+2}=2.$$



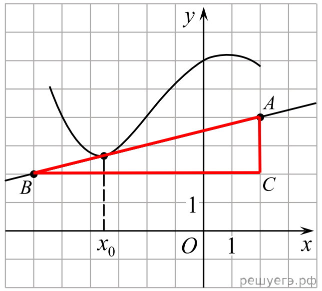
Ответ: 2.

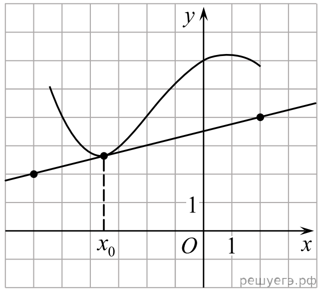
11. Задание 6

На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A\,(2;4)$, $B\,(-6;2)$, $C(2;2)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ABC. Поэтому



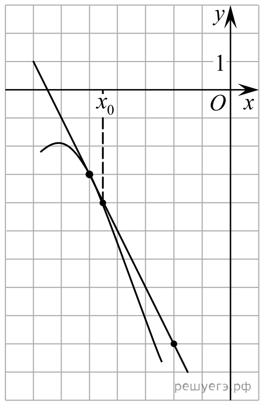


$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

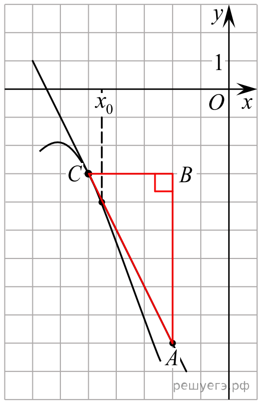
12. Задание 6

На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(-2;-9)$, $B(-2;-3)$, $C(-5;-3)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB. Поэтому

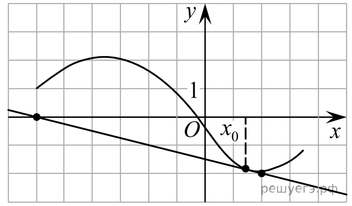


$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{6}{3} = -2.$$

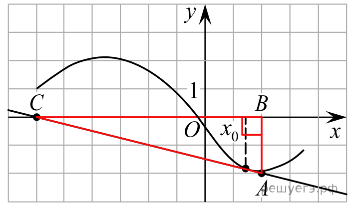
Ответ: −2.

13. Задание 6

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Решение.



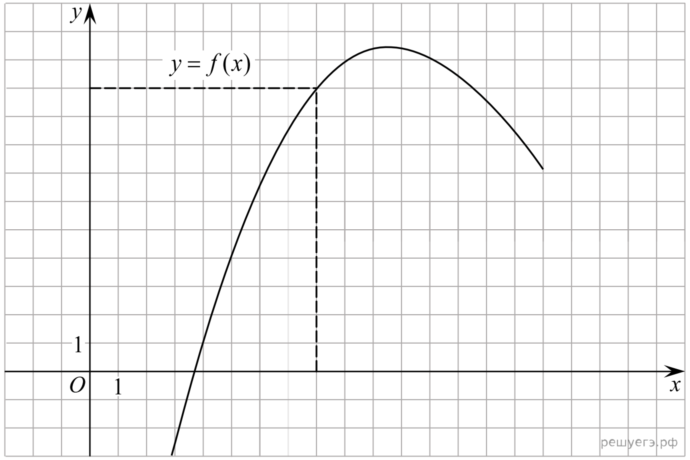
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(2;-2)$, $B(2;0)$, $C(-6;0)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB:

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0,25.$$

Ответ: − 0,25.

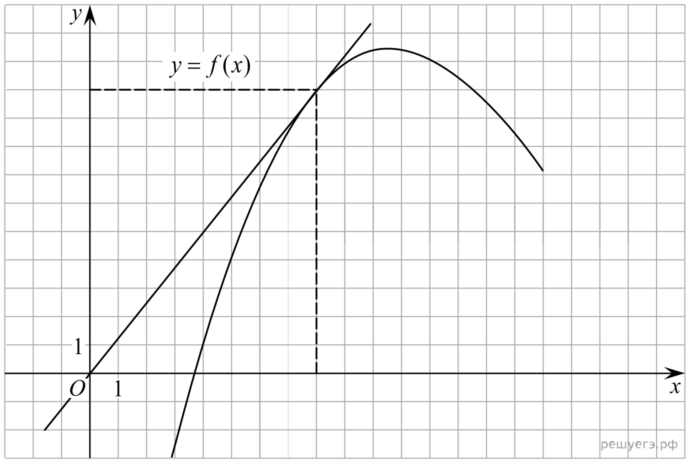
14. Задание 6

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите $f'(8)$.



Решение.

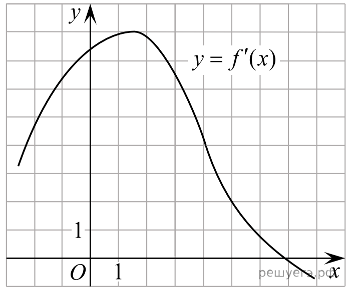
Поскольку касательная проходит через начало координат, её уравнение имеет вид $y = kx$. Эта прямая проходит через точку (8;10), поэтому $10=8\cdot k$, откуда k=1,25. Поскольку угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, получаем: $f'(8) = 1,25$.



О т в е т: 1,25.

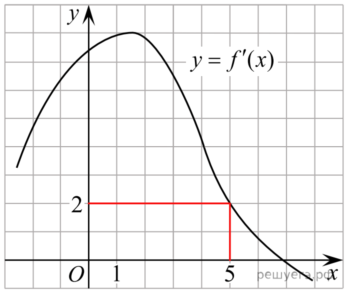
15. Задание 6

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней.



Решение.

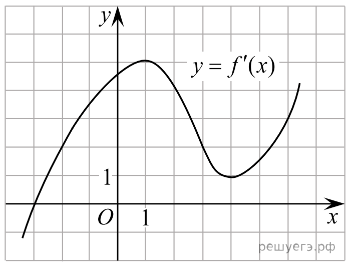
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней, она имеет угловой коэффициент равный 2 и $f'(x_0) = 2$. Осталось найти, при каких x производная принимает значение 2. Искомая точка $x_0 = 5$.



О т в е т: 5.

16. Задание 6

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна оси абсцисс или совпадает с ней, она имеет вид $y = b$, и её угловой коэффициент равен 0. Следовательно, мы ищем точку, в которой угловой коэффициент, равен нулю, а значит, и производная равна нулю. Производная равна нулю в той точке, в которой её график пересекает ось абсцисс. Поэтому искомая точка $x = -3$.

О т в е т: −3.

17. Задание 6

Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $28x^2 + bx + 15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + l$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + l. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases}56x+b=-5,\\28x^2+bx+15=-5x+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-5-56x,\\28x^2+(-5-56x)x+15=-5x+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-5-56x,\\x^2=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

По условию абсцисса точки касания положительна, поэтому $x=0{,}5$, откуда $b=-33$.

Приведём другое решение.

Касательная к параболе имеет с ней единственную общую точку, поэтому уравнение $28x^2+bx+15=-5x+8$ должно иметь единственное решение, а значит, должен равняться нулю дискриминант уравнения $28x^2+(b+5)x+7=0$. Найдем его:

$$D=(b+5)^2-4\cdot7\cdot28=(b+5)^2-28^2=(b+5+28)(b+5-28)=(b+33)(b-23).$$

Дискриминант обращается в нуль при $b=-33$ или $b=23$.

Проверим, положительны ли абсциссы точек касания при найденных значениях параметра. Для этого подставим их в уравнение $28x^2+(b+5)x+7=0$. При $b=-33$ имеем:

$$28x^2-28x+7=0\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=0\Leftrightarrow(2x-1)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Аналогично при $b=23$ имеем:

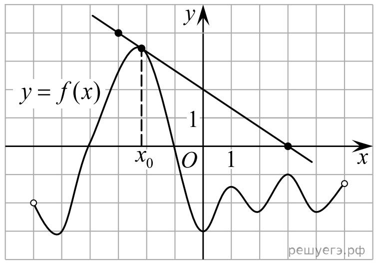
$$28x^2+28x+7=0\Leftrightarrow 4x^2+4x+1=0\Leftrightarrow(2x+1)^2=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Точка касания имеет положительную абсциссу при $b=-33$.

Ответ: −33.

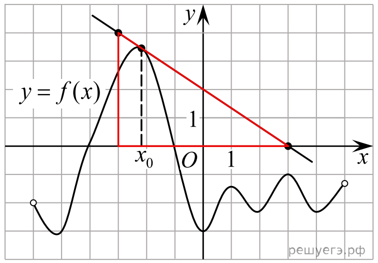
18. Задание 6

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Найдите значение производной функции $g(x)=6f(x)-3x$ в точке x_0.



Решение.

Найдём производную функции $g(x)$:



$$g'(x)=6\cdot f'(x)-3.$$

По рисунку найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Поэтому $f'(x_0)=-\dfrac{2}{3}$.

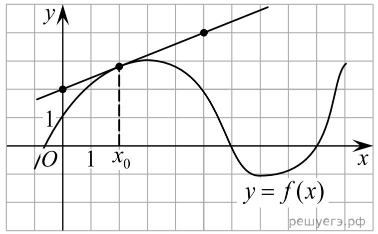
Тогда для искомого значения получаем

$$g'(x_0)=6\cdot f'(x_0)-3=6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-3=-7.$$

Ответ: −7.

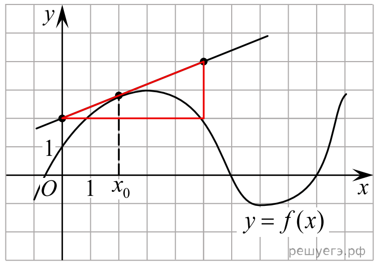
19. Задание 6

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $x_0=2$. Найдите значение производной функции $g(x)=x^2-f(x)+1$ в точке x_0.



Решение.

Найдём производную функции $g(x)$:



$$g'(x)=2x-f'(x).$$

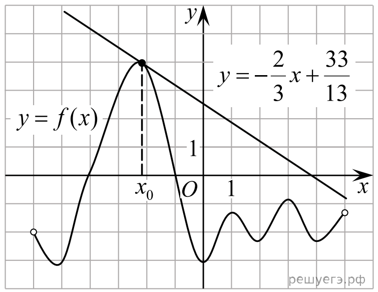
По рисунку найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Поэтому $f'(x_0)=f'(2)=\dfrac{2}{5}=0{,}4$.

Тогда для искомого значения получаем

$$g'(x_0)=g'(2)=2\cdot x_0-f'(x_0)=2\cdot2-f'(2)=2\cdot2-0{,}4=3{,}6.$$

Ответ: 3,6.

20. Задание 6



На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = 12f(x) + \frac{6}{13}$ в точке x_0.

Решение.

Найдём производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = 12 \cdot f'(x).$$

Найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной.

$$f'(x_0) = k = -\frac{2}{3}.$$

Тогда искомое значение

$$g'(x_0) = 12 \cdot f'(x_0) = 12 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -8.$$

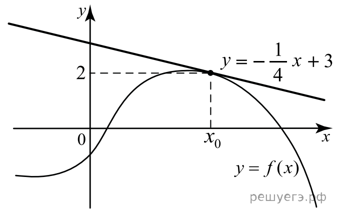
Ответ: −8.

21. Задание 6

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение функции $g(x) = f'(x) - f(x) + 3$ в точке x_0.

Решение.

Вариант № 41869133 Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru)



Найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной.

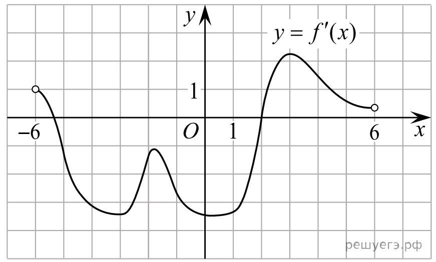
$$f'(x_0) = k = -\frac{1}{4}.$$

Тогда искомое значение

$$g(x_0) = f'(x_0) - f(x_0) + 3 = -\frac{1}{4} - 2 + 3 = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

22. Задание 6



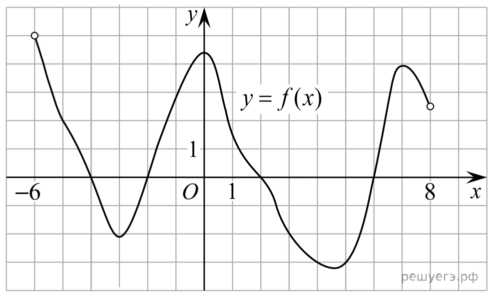
На рисунке изображен графикпроизводной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Решение.

Промежутки возрастания данной функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых ее производная неотрицательна, то есть промежуткам (−6;−5,2] и [2;6). Данные промежутки содержат целые точки 2, 3, 4 и 5. Их сумма равна 14.

Ответ: 14.

23. Задание 6



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−6; 8). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Решение.

Производная функции положительна на тех интервалах, на которых функция возрастает, т.е. на интервалах (−3;0) и (4,2; 7). В них содержатся целые точки −2, −1, 5 и 6, всего их 4.

Ответ: 4.

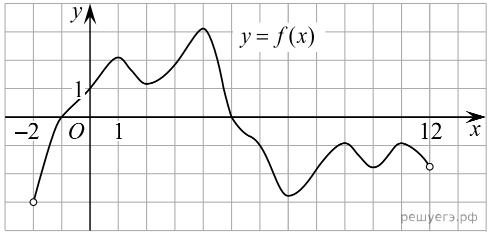
24. Задание 6

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−2;12). Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

Решение.

Заданная функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10. Поэтому сумма точек экстремума равна 1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44.

Ответ: 44.

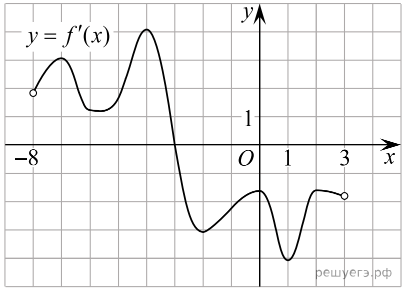


25. Задание 6

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−8; 3). В какой точке отрезка [−3; 2] функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

Решение.

На заданном отрезке производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает. Поэтому наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке −3.



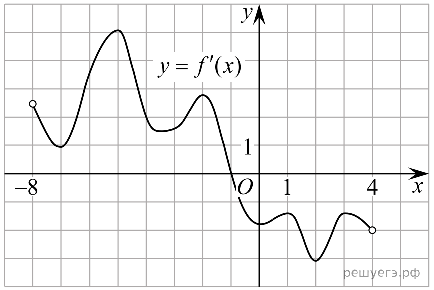
Ответ: −3.

26. Задание 6

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−8; 4). В какой точке отрезка [−7; −3] $f(x)$ принимает наименьшее значение?

Решение.

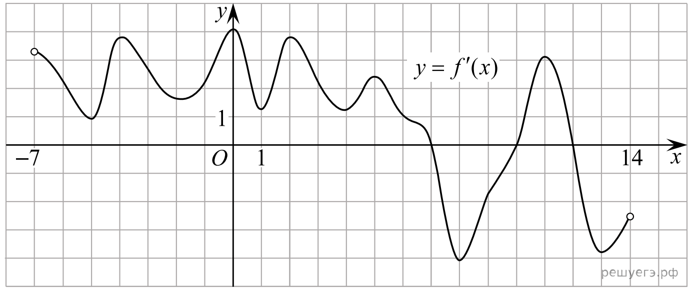
На заданном отрезке производная функции положительна, поэтому функция на этом отрезке возрастает. Поэтому наименьшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке −7.



Ответ: −7.

27. Задание 6

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−7;14). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке [−6; 9].



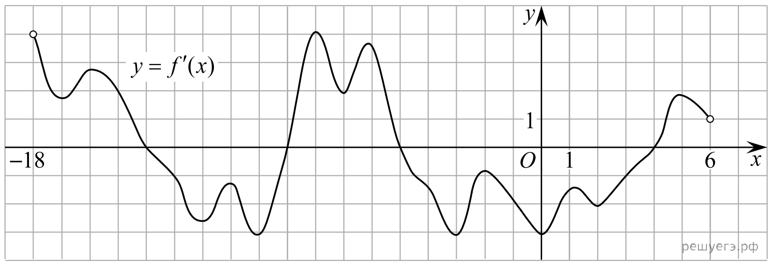
Решение.

Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с положительного на отрицательный. На отрезке [−6; 9] функция имеет одну точку максимума $x = 7$.

Ответ: 1.

28. Задание 6

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−18; 6). Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке [−13;1].



Решение.

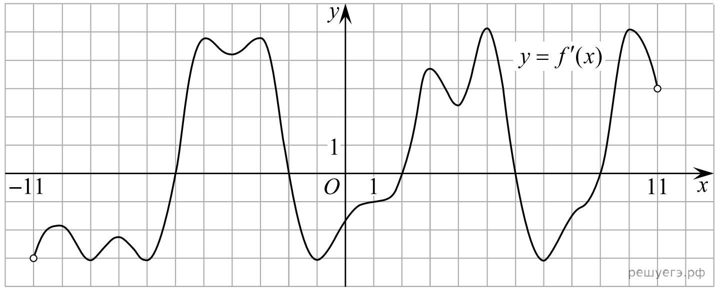
Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с минуса на плюс. На отрезке

[−13;1] функция имеет одну точку минимума $x = -9$.

О т в е т: 1.

29. Задание 6

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−11;11). Найдите количество точек экстремума функции *f(x)* на отрезке [−10; 10].



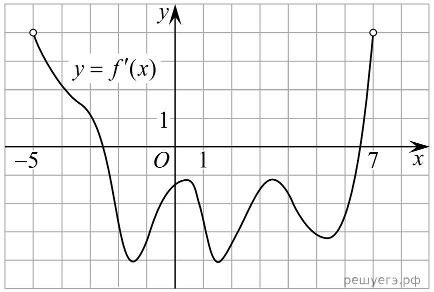
Решение.

Точки экстремума соответствуют точкам смены знака производной. Производная меняет знак в точках −6, −2, 2, 6,9. Тем самым, на отрезке [−10;10] функция имеет 5 точек экстремума.

О т в е т: 5.

30. Задание 6

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−5;7). Найдите промежутки убывания функции *f(x)*. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Решение.

Промежутки убывания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть интервалу (−2,5;6,5). Данный интервал содержит следующие целые точки: –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 сумма которых равна 18.

О т в е т: 18.

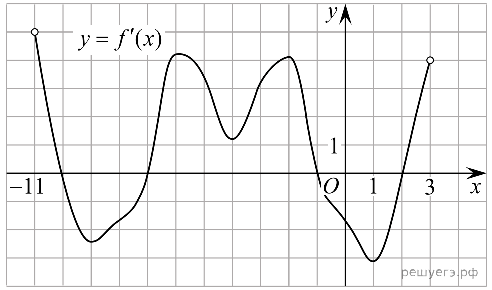
31. Задание 6

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−11;3). Найдите промежутки возрастания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение.

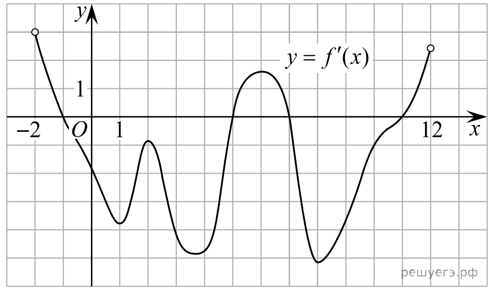
Промежутки возрастания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции неотрицательна, то есть промежуткам (−11;−10], [−7;−1], [2;3). Наибольший из них — отрезок [−7; −1], длина которого 6.

О т в е т: 6.



32. Задание 6

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−2;12). Найдите промежутки убывания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Решение.

Если функция непрерывна на отрезке [*a*; *b*], а её производная положительна (отрицательна) на интервале (*a*; *b*), то функция возрастает (убывает) на отрезке [*a*; *b*].

Производная функции отрицательна, на интервалах (−1;5) и (7;11). Значит, функция убывает на отрезках [−1;5] длиной 6 и [7;11] длиной 4. Длина наибольшего из них 6.

О т в е т: 6.

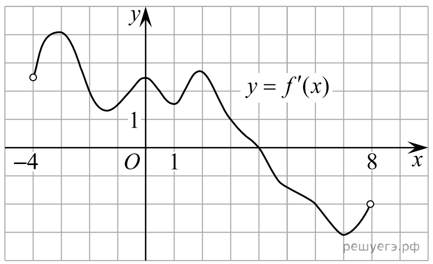
33. Задание 6

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−4;8). Найдите точку экстремума функции *f(x)* на отрезке [−2; 6].

Решение.

Если производная в некоторой точке равна нулю и меняет знак, то это точка экстремума. На отрезке [−2; 6] график производной пересекает ось абсцисс, производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, точка 4 является точкой экстремума.

Ответ: 4.



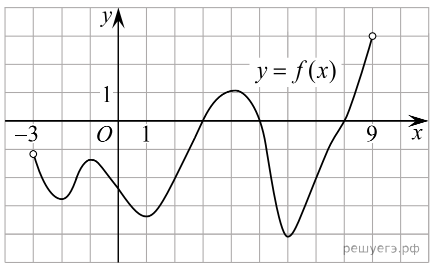
34. Задание 6

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3;\ 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

Решение.

Производная изображенной на рисунке функции $f(x)$ равна нулю в точках экстремумов: -2; -1; 1; 4 и 6. Производная равна нулю в 5 точках.

Ответ: 5.



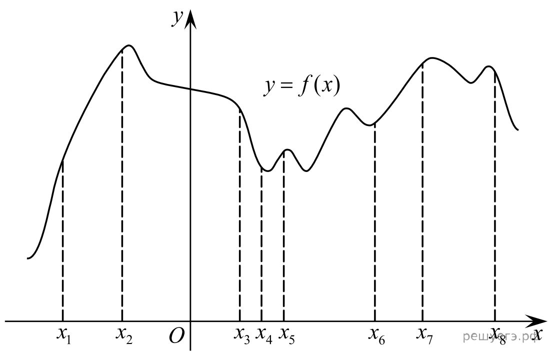
35. Задание 6

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

Решение.

Положительным значениям производной соответствует интервалы, на которых функция $f(x)$ возрастает. На них лежат точки x_1, x_2, x_5, x_6, x_7. Таких точек 5.

Ответ: 5.



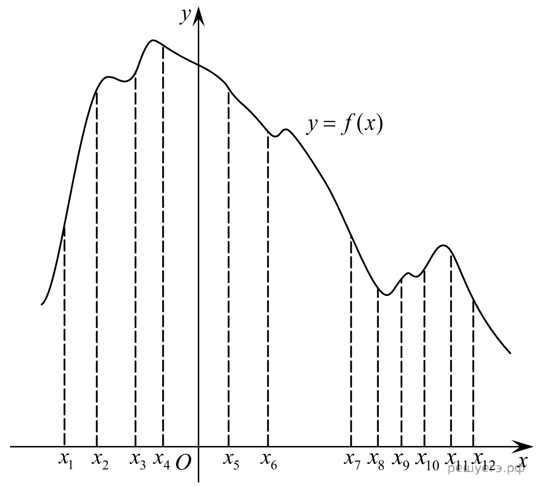
36. Задание 6

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

Решение.

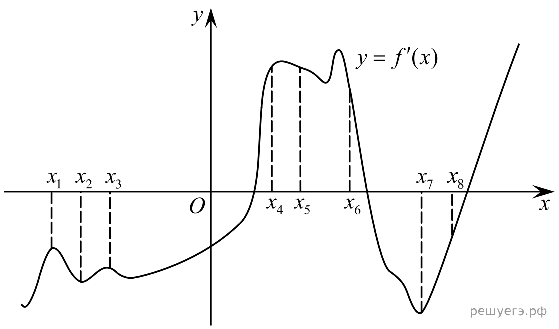
Отрицательным значениям производной соответствуют интервалы, на которых функция $f(x)$ убывает. В этих интервалах лежат точки $x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{11}, x_{12}$. Таких точек 7.

Ответ: 7.



37. Задание 6

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ - производной функции $f(x)$.На оси абсцисс отмечены восемь точек: x_1, x_2, x_3, ..., x_8. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Решение.

Возрастанию дифференцируемой функции $f(x)$ соответствуют положительные значения её производной. Производная положительна в точках x_4, x_5 x_6. Таких точек 3.

Ответ: 3.

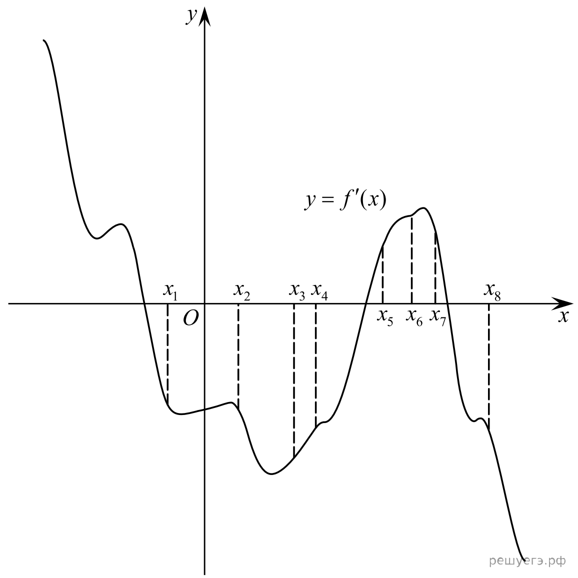
38. Задание 6

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, $\ldots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?

Решение.

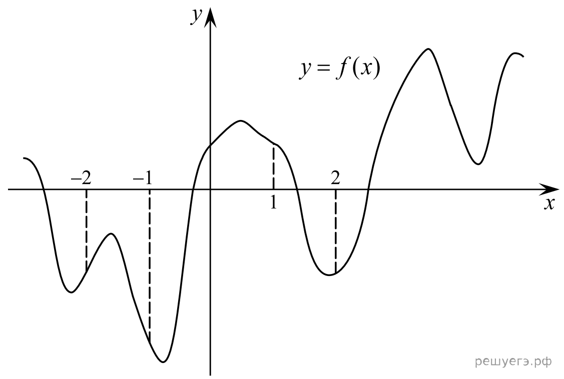
Убыванию дифференцируемой функции $f(x)$ соответствуют отрицательные значения её производной. Производная отрицательна в точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_8: точки лежат ниже оси абсцисс, их ординаты отрицательны. Таких точек 5.

Ответ: 5.



39. Задание 6

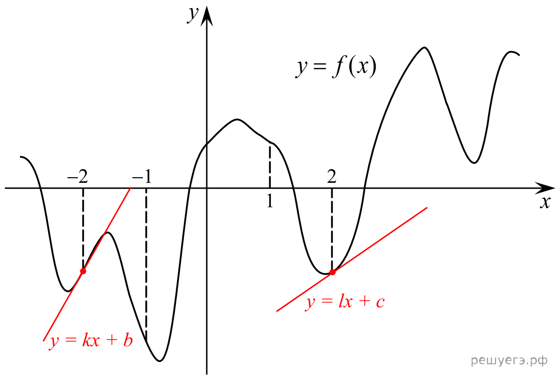
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки −2, −1, 1, 2. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



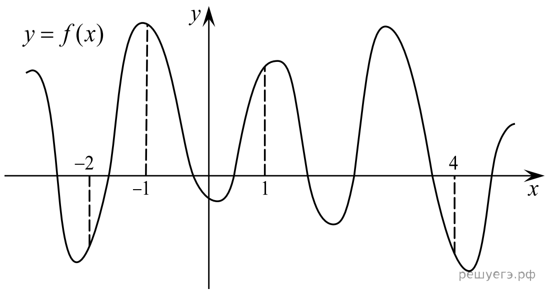
Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная положительна в точках −2 и 2. Угол наклона (и его тангенс) явно больше в точке −2.

Ответ: −2.



40. Задание 6



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки −2, −1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная отрицательна в точках −1 и 4. Модуль тангенса угла наклона касательной явно больше в точке 4, поэтому тангенс в этой точке наименьший.

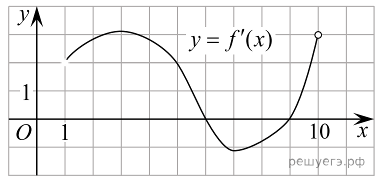
Ответ: 4.

41. Задание 6

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ определённой на интервале (1; 10). Найдите точку минимума функции $f(x)$.

Решение.

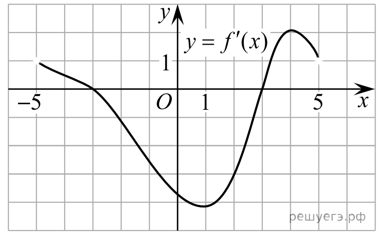
Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с отрицательного на положительный. На интервале (1; 10) функция имеет одну точку минимума $x = 9$.



Ответ: 9.

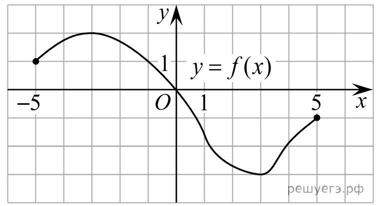
42. Задание 6

Функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке [−5; 5]. На рисунке изображён график её производной. Найдите точку x_0, в которой функция принимает наименьшее значение, если $f(-5) \geq f(5)$.



Решение.

Напомним, что если функция непрерывна на отрезке [a; b], а её производная положительна (отрицательна) на интервале (a; b), то функция возрастает (убывает) на отрезке [a; b].



Тем самым, функция f, график производной которой дан в условии, возрастает на отрезках [−5;−3] и [3; 5] и убывает на отрезке [−3; 3].

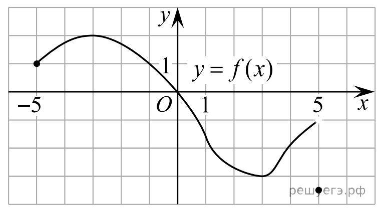
Из этого следует, что f принимает наименьшее значение на левой границе отрезка, в точке −5, или в точке минимума x_{min}=3. В силу возрастания f на отрезке [3; 5] справедливо неравенство $f(5) > f(3)$. Поскольку по условию $f(-5)$ не меньше, чем $f(5)$, справедлива оценка $f(-5) > f(3)$.

Тем самым, наименьшего значения функция f достигает в точке 3. График одной из функций, удовлетворяющих условию, приведён на рисунке.

Ответ: 3.

Примечание Б. М. Беккера (Санкт-Петербург).

Непрерывность функции на концах отрезка существенна. Действительно, если бы функция f имела в точке 5 разрыв первого рода (см. рис.), значение $f(5)$ могло оказаться меньше значения $f(3)$, а тогда наименьшим значением функции на отрезке [−5; 5] являлось бы значение функции в точке 5.



Примечание портала РЕШУ ЕГЭ.

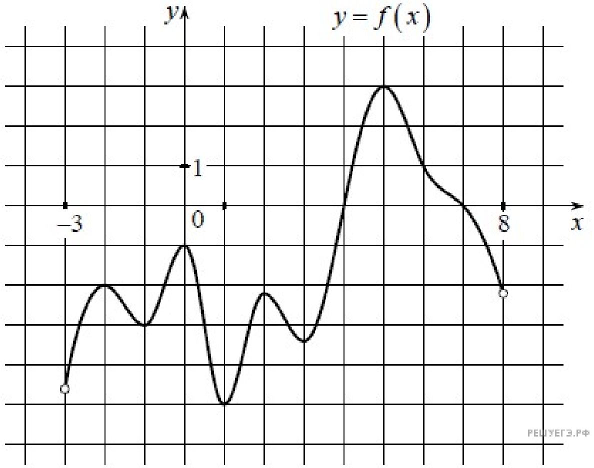
Мы были удивлены, обнаружив это задание в экзаменационной работе досрочного ЕГЭ по математике 28.04.2014г. Это непростое задание отсутствует в Открытых банках заданий, что, несомненно, оказалось неприятным сюрпризом для выпускников.

Примечание Александра Ларина (Москва).

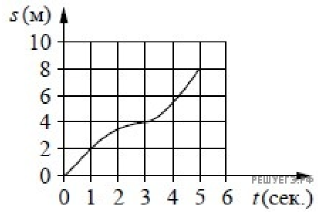
В этой задачке весь ужас «выстрелил вхолостую», 99,9999% решающих даже и не обратят внимание на потенциальную угрозу — ответ-то получается такой же. А про соотношение значений на границах и уж тем более про непрерывность никто читать и не собирается :-) А вот если условие слегка поменять, то «минус балл» всей стране обеспечен будет.

43. Задание 6

7.1 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3;\ 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 1$.



7.2 Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Решение.

7.1 Поскольку касательная параллельна прямой y=1 или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны 0. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. Производная равна нулю в точках экстремума функции. На заданном интервале функция имеет 7 экстремумов. Таким образом, касательная к графику функции параллельна прямой y = 1 или совпадает с ней в 7 точках.

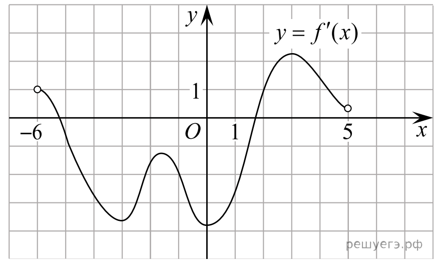
Ответ: 7

7.2 Чтобы найти среднюю скорость движения точки, необходимо пройденное расстояние поделить на время прохождения: $8 : 5 = 1,6$ м/с

Ответ: 1,6

44. Задание 6

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-6; 5]$. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Решение.

Промежутки возрастания данной функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых её производная неотрицательна, то есть полуинтервалам $(-6; -5,2]$ и $[1,7; 5)$. В силу непрерывности функция $f(x)$ возрастает на отрезках $[-6;-5,2]$ и $[1,7;5]$. Данные промежутки содержат целые точки −6, 2, 3, 4 и 5. Их сумма равна 8.

Ответ: 8.

Примечание.

Напомним, что если функция непрерывна на каком-либо из концов промежутка возрастания или убывания, то граничную точку присоединяют к этому промежутку. В частности, если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$ и монотонна на интервале $(a; b)$, то функция монотонна на всем отрезке $[a; b]$.

Обобщением этого утверждения служит следующая теорема: функция монотонна на промежутке, если ее производная сохраняет знак всюду на этом промежутке, за исключением конечного числа точек, в которых функция непрерывна. Например, производная функции

$$f(x) = x + \frac{|x|}{2} = \begin{cases} \frac{x}{2},\ x < 0, \\ \frac{3x}{2},\ x \geq 0 \end{cases}$$

не существует в точке $x = 0$ и положительна во всех остальных точках. Функция f в точке $x = 0$ непрерывна, следовательно, она возрастает на $\mathbb{R}$.

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	119975	60
2	119976	20
3	119977	59
4	119978	8
5	119979	7
6	27485	0,5
7	27486	-1
8	27489	4
9	27501	5
10	27503	2
11	27504	0,25
12	27505	-2
13	27506	-0,25
14	40129	1,25
15	40130	5
16	40131	-3
17	119973	-33
18	525688	-7
19	525689	3,6
20	525698	-8
21	525703	0,75
22	6429	14
23	27487	4
24	27490	44
25	27491	-3
26	27492	-7
27	27494	1
28	27495	1
29	27496	5
30	27498	18
31	27499	6
32	27500	6
33	27502	4
34	119971	5
35	317539	5
36	317540	7
37	317541	3
38	317542	5
39	317543	-2
40	317544	4
41	501188	9
42	505119	3
43	512329	7|1,6
44	551737	8

Вариант № 41869133 Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru)