

Задачи с прикладным содержанием

Линейные уравнения и неравенства

1. Задание 7

При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10\text{ м}$. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ})$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Квадратные и степенные уравнения и неравенства

2. Задание 7

После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

3. Задание 7

Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия — монополиста от цены P (тыс. руб.) задается формулой $q = 100 - 10P$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(P) = q \cdot P$. Определите наибольшую цену P , при которой месячная выручка $r(P)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

4. Задание 7

Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трех метров?

5. Задание 7

Если достаточно быстро вращать ведро с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах,

$$P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right),$$
 где m — масса воды в килограммах, v скорость движения ведерка в м/с, L — длина веревки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10\text{ м/с}^2$). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

6. Задание 7

Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100\text{ м}}^{-1}$, $b = 1$ — постоянные параметры, $x^{(м)}$ — смещение камня по горизонтали, $y^{(м)}$ — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

7. Задание 7

Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по

закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 20^\circ/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4^\circ/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 1200° . Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ выразите в минутах.

8. Задание 7

Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 8$ кг и радиуса $R = 10$ см, и двух боковых с массами $M = 1$ кг и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $\text{кг} \cdot \text{см}^2$, дается

$$I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2).$$

формулой. При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения $625 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$? Ответ выразите в сантиметрах.

9. Задание 7

На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4,2$ — постоянная, r — радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ Н/кг}$). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем $336\,000 \text{ Н}$? Ответ выразите в метрах.

10. Задание 7

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{16} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а мощность её излучения равна $9,12 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

Рациональные уравнения и неравенства

11. Задание 7

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

соотношение. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

12. Задание 7

Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 440$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} \text{ (Гц)}, \text{ где } c - \text{ скорость}$$

первого: она зависит от скорости тепловоза по закону звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315$ м/с. Ответ выразите в м/с.

13. Задание 7

В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 90$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление дается

формулой $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 9 Ом. Ответ выразите в омах.

14. Задание 7

Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу $m = 1260$ тонн, представляют собой две пустотелые балки длиной $l = 18$ метров и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p = \frac{mg}{2ls}$, где m – масса экскаватора (в тоннах), l – длина балок в метрах, s – ширина балок в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление P не должно превышать 140 кПа. Ответ выразите в метрах.

15. Задание 7

При сближении источника и приёмника звуковых сигналов движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу частота звукового сигнала, регистрируемого приемником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим

выражением: $f = f_0 \frac{c + u}{c - v}$ (Гц), где c – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 10$ м/с и $v = 15$ м/с – скорости приемника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приемнике f будет не менее 160 Гц?

16. Задание 7

Автомобиль, масса которого равна $m = 2160$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остается неизменным, и проходит за это время путь $S = 500$ метров. Значение

силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила F , приложенная к автомобилю, не меньше 2400 Н. Ответ выразите в секундах.

Иррациональные уравнения и неравенства

17. Задание 7

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч². Скорость вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l – пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

18. Задание 7

При движении ракеты ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах,

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

сокращается по закону где $l_0 = 5$ м – длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с – скорость света, а v – скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала не более 4 м? Ответ выразите в км/с.

19. Задание 7

Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по

$$l = \sqrt{\frac{Rh}{500}},$$

формуле где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. К пляжу ведет лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 6,4 километров?

20. Задание 7

Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землей, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по

формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ (км) — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 4 километра? Ответ выразите в километрах.

21. Задание 7

Автомобиль массой m кг начинает тормозить и проходит до полной остановки путь S м. Сила трения F (в Н), масса автомобиля m (в кг), время t (в с) и пройденный путь S (в м) связаны

$$F = \frac{2mS}{t^2}.$$

соотношением. Определите, сколько секунд заняло торможение, если известно, что сила трения равна 2000 Н, масса автомобиля — 1500 кг, путь — 600 м.

Показательные уравнения и неравенства

22. Задание 7

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 10^5$ Па·м⁵, где p – давление газа в паскалях, V – объем газа в кубических метрах, $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p , равном $3,2 \cdot 10^6$ Па.

23. Задание 7

Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = \text{const}$, где p (Па) – давление газа, V – объем газа в кубических метрах, a – положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение в два раза объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

24. Задание 7

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны

соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 256 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

Логарифмические уравнения и неравенства

25. Задание 7

Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ – постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 21 с. Ответ дайте в киловольтах.

26. Задание 7

Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 3$ моль воздуха объемом $V_1 = 8$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 5,75$ – постоянная, а $T = 300$ К – температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж?

Тригонометрические уравнения и неравенства

27. Задание 7

Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. (в секундах) определяется по формуле. При каком значении угла α (в градусах) время полета составит 3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

28. Задание 7

Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н·м) определяется формулой $M = NIBl^2 \sin \alpha$, где $I = 2$ А – сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл – значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м – размер рамки, $N = 1000$ – число витков провода в рамке, α – острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше 0,75 Н·м?

29. Задание 7

Очень легкий заряженный металлический шарик зарядом $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 5$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_{\text{л}} = qvB \sin \alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвется от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила $F_{\text{л}}$ была не менее чем $2 \cdot 10^{-8}$ Н? Ответ дайте в градусах.

30. Задание 7

Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 20$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 20 м?

31. Задание 7

Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 12$ с — период колебаний, $v_0 = 0,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

32. Задание 7

Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 5 \sin \pi t$ (см/с), где t — время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения была не менее 2,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Разные задачи

33. Задание 7

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель — целое число от -2 до 2 .

Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вдвое дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{3In + Op + 2Tr}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 30.

34. Задание 7

Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1) \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}},$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина «Бета», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, их средняя оценка равна 0,65, а оценка экспертов равна 0,37.

35. Задание 7

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности публикаций Tr , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель — целое число от -2 до 2 .

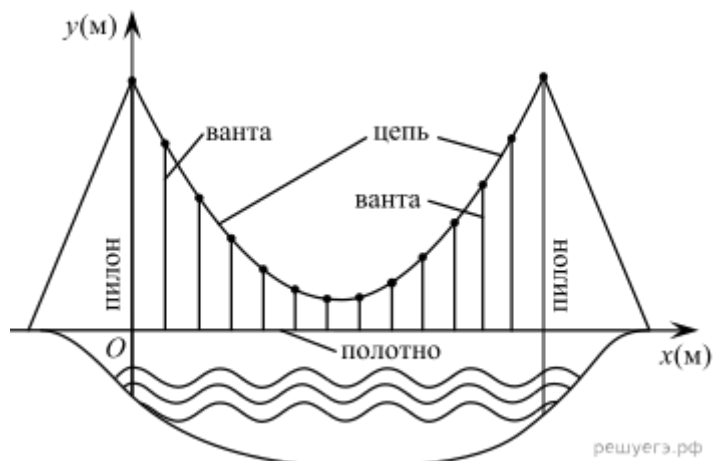
Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — впятеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула

$$R = \frac{5In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

приняла вид

Если по всем четырем показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

36. Задание 7



На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами.

Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке.

В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0,005x^2 - 0,74x + 25$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 30 метрах от пилон. Ответ дайте в метрах.