Задачи с прикладным содержанием

1. Задание 7

При температуре $0\ ^\circ\mathrm{C}$ рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1+\alpha\cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}(^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $l(t^\circ) - l_0 = 3$ мм при заданных значениях длины $l_0 = 10$ м и коэффициента теплового расширения $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}\ (^\circ\mathrm{C})^{-1}$:

$$l(t^\circ) - l_0 = 3\cdot 10^{-3} \Leftrightarrow l_0(1+\alpha\cdot t^\circ) - l_0 = 3\cdot 10^{-3} \Leftrightarrow l_0\alpha t^\circ = 3\cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\cdot 1{,}2\cdot 10^{-5} t^\circ = 3\cdot 10^{-3} \Leftrightarrow t^\circ = \frac{3\cdot 10^{-3}}{1{,}2\cdot 10^{-4}} \Leftrightarrow t^\circ = 25\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Ответ: 25.

2. Задание 7

После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h – расстояние в метрах, t – время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

Решение.

Пусть h_1 – расстояние до воды до дождя, h_2 – расстояние до воды после дождя. После дождя уровень воды в колодце повысится, расстояние до воды уменьшится, и время падения уменьшится, станет равным $t = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$ с. Уровень воды поднимется на $h_1 - h_2$ метров.

$$h_1 - h_2 = 5\cdot 0{,}6^2 - 5\cdot 0{,}4^2 = 1.$$

Ответ: 1.

3. Задание 7

Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия – монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 100 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q\cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $r(p) \geq 240$:

$$r(p) = q\cdot p = (100 - 10p)p = 100p - 10p^2,$$

$$r(p) \geq 240 \Leftrightarrow 10p^2 - 100p + 240 \leq 0 \Leftrightarrow p^2 - 10p + 24 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \leq p \leq 6.$$

Ответ: 6.

4. Задание 7

Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=1{,}6+8t-5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трех метров?

Решение.

Определим моменты времени, когда мяч находился на высоте ровно три метра. Для этого решим уравнение $h(t)=3$:

$$h(t)=3 \Leftrightarrow 1{,}6+8t-5t^2=3 \Leftrightarrow 5t^2-8t+1{,}4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0{,}2; \\ t=1{,}4. \end{array}\right.$$

Проанализируем полученный результат: поскольку по условию задачи мяч брошен снизу вверх, это означает, что в момент времени $t=0{,}2$ (с) мяч находился на высоте 3 метра, двигаясь снизу вверх, а в момент времени $t=1{,}4$ (с) мяч находился на этой высоте, двигаясь сверху вниз. Поэтому он находился на высоте не менее трёх метров 1,4 − 0,2 = 1,2 секунды.

Ответ: 1,2.

5. Задание 7

Если достаточно быстро вращать ведерко с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P=m\left(\frac{\upsilon^2}{L}-g\right)$, где m – масса воды в килограммах, υ скорость движения ведерка в м/с, L – длина веревки в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g=10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведерко, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $P(\upsilon)\geq 0$ при заданной длине верёвки $L=0{,}4$ м:

$$P\geq 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{\upsilon^2}{L}-g\right)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\upsilon^2}{0{,}4}-10\geq 0 \Leftrightarrow \upsilon^2\geq 4 \Leftrightarrow \upsilon\geq 2 \text{ м/с}.$$

Ответ: 2.

6. Задание 7

Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y=ax^2+bx$, где $a=-\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b=1$ – постоянные параметры, $x(\text{м})$ – смещение камня по горизонтали, $y(\text{м})$ – высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $y\geq 9$: при заданных значениях параметров a и b:

$$y\geq 9 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}x^2+x\geq 9 \Leftrightarrow x^2-100x+900\leq 0 \Leftrightarrow 10\leq x\leq 90 \text{ м}.$$

Камни будут перелетать крепостную стену на высоте не менее 1 метра, если камнеметательная машина будет находиться на расстоянии от 10 до 90 метров от этой стены. Наибольшее расстояние – 90 метров.

Ответ: 90.

7. Задание 7

Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2},$ где t — время в минутах, $\omega = 20^\circ/$мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4^\circ/$мин^2 — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 1200°. Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ выразите в минутах.

Решение.

Задача сводится к нахождению наибольшего решения неравенства $\varphi \leq 1200$ при заданных значениях параметров ω и β:

$$\varphi \leq 1200 \Leftrightarrow 2t^2 + 20t \leq 1200 \Leftrightarrow t^2 + 10t - 600 \leq 0 \Leftrightarrow -30 \leq t \leq 20 \text{ мин.}$$

Учитывая то, что время — неотрицательная величина, получаем $t \leq 20.$ Угол намотки достигнет значения 1200° при $t = 20$ мин.

Ответ: 20.

8. Задание 7

Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 8$ кг и радиуса $R = 10$ см, и двух боковых с массами $M = 1$ кг и с радиусами $R + h.$ При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $\text{кг} \cdot \text{см}^2$, дается формулой $I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2).$ При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения 625 $\text{кг} \cdot \text{см}^2$? Ответ выразите в сантиметрах.

Решение.

Задача сводится к нахождению наибольшего решения неравенства $I \leq 625$ при заданных значениях параметров m, M и R:

$$I \leq 625 \Leftrightarrow \frac{(8+2) \cdot 10^2}{2} + 1 \cdot (2 \cdot 10 \cdot h + h^2) \leq 625 \Leftrightarrow h^2 + 20h - 125 \leq 0.$$

Решая квадратное неравенство методом интервалов, получим $-25 \leq h \leq 5.$ Наибольшее решение двойного неравенства — число 5.

Ответ: 5.

9. Задание 7

На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_{\text{A}} = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4{,}2$ – постоянная, r – радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000$ кг/м^3 – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 336 000 Н? Ответ выразите в метрах.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $F_{\text{А}} \le 336\,000$ при заданных значениях плотности воды и ускорении свободного падения:

$$F_{\text{А}} \le 336000 \Leftrightarrow 4,2 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot r^3 \le 336000 \Leftrightarrow r^3 \le 8 \Leftrightarrow r \le 2 \text{ м.}$$

Ответ: 2.

10. Задание 7

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{16} \cdot 10^{20}$ м^2, а мощность её излучения равна $9,12 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $P = 9,12 \cdot 10^{25}$ при известном значениях постоянной $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ и заданной площади звезды $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{20}$:

$$\sigma S T^4 = 9,12 \cdot 10^{25} \Leftrightarrow T^4 = \frac{9,12 \cdot 10^{25}}{\sigma S} \Leftrightarrow T = \sqrt[4]{\frac{9,12 \cdot 10^{25}}{\sigma S}},$$

откуда

$$T = \sqrt[4]{\frac{9,12 \cdot 10^{25}}{5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{16} \cdot 10^{20}}} = \sqrt[4]{25,6 \cdot 10^{13}} = \sqrt[4]{256 \cdot 10^{12}} = 4000 \text{ К.}$$

Ответ: 4000.

11. Задание 7

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана – в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

Решение.

Поскольку $f = 30$ имеем:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}.$$

Наименьшему возможному d_1 значению соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства, и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наибольшего значения при наименьшем значении вычитаемого $\frac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя d_2. Поэтому $d_2 = 180$, откуда

$$\frac{1}{d_1}=\frac{1}{30}-\frac{1}{180}\Leftrightarrow\frac{1}{d_1}=\frac{5}{180}\Leftrightarrow\frac{1}{d_1}=\frac{1}{36}\Leftrightarrow d_1=36$$ см.

По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 30 до 50 см от линзы. Найденное значение удовлетворяет условию.

Ответ: 36.

12. Задание 7

Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0=440$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(\upsilon)=\frac{f_0}{1-\frac{\upsilon}{c}}$ (Гц), где c – скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c=315$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $f(\upsilon)-f_0\geq 10$ при известном значении постоянной $f_0=440$ Гц:

$$f(\upsilon)-f_0\geq 10\Leftrightarrow\frac{f_0}{1-\frac{\upsilon}{c}}-f_0\geq 10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{440}{1-\frac{\upsilon}{315}}-440\geq 10\Leftrightarrow 1-\frac{\upsilon}{315}\leq\frac{44}{45}\Leftrightarrow\upsilon\geq\frac{315}{45}=7\text{ м/с}.$$

Ответ: 7.

13. Задание 7

В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1=90$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление дается формулой $R_{\text{общ}}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 9 Ом. Ответ выразите в омах.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $R_{\text{общ}}\geq 9$ Ом при известном значении сопротивления приборов $R_1=90$ Ом:

$$R_{\text{общ}}\geq 9\Leftrightarrow\frac{90R_2}{90+R_2}\geq 9\Leftrightarrow 81R_2\geq 810\Leftrightarrow R_2\geq 10\text{ Ом}.$$

Ответ: 10.

14. Задание 7

Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу $m=1260$ тонн, представляют собой две пустотелые балки длиной $l=18$ метров и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p=\frac{mg}{2ls}$, где m – масса экскаватора (в тоннах), l – длина балок в метрах, s – ширина балок в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 140 кПа. Ответ выразите в метрах.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $p \le 140$ кПа при известных значениях длины балок $l = 18$ м, массы экскаватора $m = 1260$ т:

$$p \le 140 \Leftrightarrow \frac{1260 \cdot 10}{2 \cdot 18s} \le 140 \Leftrightarrow s \ge 2,5 \text{ м.}$$

Ответ: 2,5.

15. Задание 7

При сближении источника и приёмника звуковых сигналов движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу частота звукового сигнала, регистрируемого приемником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \dfrac{c+u}{c-\upsilon}$ (Гц), где c – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 10$ м/с и $\upsilon = 15$ м/с – скорости приемника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приемнике f будет не менее 160 Гц?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $f \ge 160$ Гц при известных значениях $u = 10$ м/с и $\upsilon = 15$ м/с – скорости приёмника и источника относительно среды соответственно:

$$f \ge 160 \Leftrightarrow 150 \cdot \frac{c+10}{c-15} \ge 160 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{15(c+10)-16(c-15)}{c-15} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{390-c}{c-15} \ge 0 \Leftrightarrow 15 < c \le 390 \text{ м/с.}$$

Ответ: 390.

16. Задание 7

Автомобиль, масса которого равна $m = 2160$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остается неизменным, и проходит за это время путь $S = 500$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F = \dfrac{2mS}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила F, приложенная к автомобилю, не меньше 2400 Н. Ответ выразите в секундах.

Решение.

Найдем, за какое время автомобиль пройдет путь $S = 500$ метров, учитывая, что сила F при заданном значении массы автомобиля 2400 Н. Задача сводится к решению неравенства $\dfrac{2mS}{t^2} \ge 2400$ при заданном значении массы автомобиля $m = 2160$ кг:

$$\frac{2 \cdot 2160 \cdot 500}{t^2} \ge 2400 \Leftrightarrow t^2 \le 900 \underset{t>0}{\Leftrightarrow} t \le 30 \text{ с.}$$

Ответ: 30.

17. Задание 7

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч^2. Скорость вычисляется по формуле $\upsilon = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

Решение.

Найдём, при каком ускорении гонщик достигнет требуемой скорости, проехав один километр. Задача сводится к решению уравнения $\sqrt{2la} = 100$ при известном значении длины пути $l = 1$ км:

$$\sqrt{2la} = 100 \Leftrightarrow \sqrt{2a} = 100 \Leftrightarrow 2a = 10000 \Leftrightarrow a = 5000 \text{ км/ч}^2.$$

Если его ускорение будет превосходить найденное, то, проехав один километр, гонщик наберёт большую скорость, поэтому наименьшее необходимое ускорение равно 5000 км/ч^2.

Ответ: 5000.

18. Задание 7

При движении ракеты ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$, где $l_0 = 5$ м – длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с – скорость света, а υ – скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала не более 4 м? Ответ выразите в км/с.

Решение.

Найдем, при какой скорости длина ракеты станет равна 4 м. Задача сводится к решению уравнения $l_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} = 4$ при заданном значении длины покоящейся ракеты $l_0 = 5$ м и известной величине скорости света $c = 3 \cdot 10^5$ км/с:

$$5\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{9 \cdot 10^{10}}} = 4 \Leftrightarrow 1 - \frac{\upsilon^2}{9 \cdot 10^{10}} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\upsilon^2}{9 \cdot 10^{10}} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \upsilon^2 = \frac{81}{25} \cdot 10^{10} \Leftrightarrow \upsilon = 180\,000 \text{ км/с}.$$

Если скорость будет превосходить найденную, то длина ракеты будет менее 4 метров, поэтому минимальная необходимая скорость равна 180 000 км/с.

Ответ: 180000.

19. Задание 7

Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. К пляжу ведет лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 6,4 километров?

Решение.

Задача сводится к решению уравнений $l = 4,8$ и $l = 6,4$ при заданном значении R:

$$\sqrt{\frac{6400h}{500}} = 4,8 \Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{h}{5}} = \frac{24}{5} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{h}{5}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{h}{5} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow h = \frac{9}{5} \Leftrightarrow h = 1,8 \text{ м}.$$

$$\sqrt{\frac{6400h}{500}}=6,4\Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{32}{5}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow\frac{h}{5}=\frac{16}{25}\Leftrightarrow h=\frac{16}{5}\Leftrightarrow h=3,2$$ м.

Следовательно, чтобы видеть горизонт на более далеком расстоянии, наблюдателю нужно подняться на $3,2-1,8=1,4$ метра. Для этого ему необходимо подняться на $1,4:0,2=14:2=7$ ступенек.

Ответ: 7.

Примечание.

Иногда в физике или технике используют формулы, в которых величины имеют разные единицы измерения. Например, удобно вывести такую формулу, чтобы при ее использовании радиус планеты не приходилось выражать в метрах, а рост человека не надо было вычислять в долях километра. Особенно часто такой подход применяется в инженерных расчётах. В данной задаче величины R и l, выражены в километрах, а h — в метрах, о чем сказано в условии. Если бы все величины в этой формуле измерялись в одних и тех же единицах измерения, она выглядела бы так: $l=\sqrt{2Rh}.$ Коэффициент 500 отражает то, что все величины, за исключением $h,$ выражены в километрах. Проверьте это.

20. Задание 7

Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землей, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{2Rh},$ где $R=6400$ (км) — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 4 километра? Ответ выразите в километрах.

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $l=4$ при заданном значении R:

$$\sqrt{2\cdot 6400h}=4\Leftrightarrow 2\cdot 6400h=16\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h=\frac{16}{2\cdot 6400}\Leftrightarrow h=\frac{1}{800}\Leftrightarrow h=\frac{125}{100\,000}\Leftrightarrow h=0,00125.$$

Примечание. Заметим, что полученная величина равна 1,25 метра, т. е. соответствует уровню глаз ребенка.

Ответ: 0,00125.

21. Задание 7

Автомобиль массой m кг начинает тормозить и проходит до полной остановки путь S м. Сила трения F (в Н), масса автомобиля m (в кг), время t (в с) и пройденный путь S (в м) связаны соотношением $F=\frac{2mS}{t^2}.$ Определите, сколько секунд заняло торможение, если известно, что сила трения равна 2000 Н, масса автомобиля — 1500 кг, путь — 600 м.

Решение.

Преобразуем данную в условии формулу:

$$t^2=\frac{2mS}{F}\Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{2ms}{F}}.$$

Подставим значения и вычислим:

$$t=\sqrt{\frac{2ms}{F}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1500\cdot 600}{2000}}=\sqrt{900}=30.$$

Ответ: 30.

22. Задание 7

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 10^5$ Па.м^5, где p – давление газа в паскалях, V – объем газа в кубических метрах, $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном $3{,}2 \cdot 10^6$ Па.

Решение.

Поскольку произведение давления на степень объёма постоянно, а давление равно $3{,}2 \cdot 10^6$ Па, при заданных значениях параметров $k = \frac{5}{3}$ и $\text{const} = 10^5$ Па $\cdot$ м^5 имеем равенство:

$$3{,}2 \cdot 10^6 V^{\frac{5}{3}} = 10^5 \Leftrightarrow V^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{32} \Leftrightarrow V = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow V = \frac{1}{8} \text{ м}^3.$$

Ответ: 0,125.

23. Задание 7

Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = const$, где p (Па) – давление газа, V – объем газа в кубических метрах, *a* – положительная константа. При каком наименьшем значении константы *a* уменьшение в два раза объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

Решение.

Пусть p_1 и V_1 – начальные, а p_2 и V_2 – конечные значения давления и объема газа, соответственно. Условие $pV^a = const$ означает, что $p_1V_1^a = p_2V_2^a$, откуда $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1^a}{V_2^a} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^a$. Задача сводится к решению неравенства $\frac{p_2}{p_1} \geq 4$, причем по условию $\frac{V_1}{V_2} = 2$:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^a \geq 4 \Leftrightarrow 2^a \geq 4 \Leftrightarrow a \geq 2.$$

Ответ: 2.

24. Задание 7

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 256 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

Решение.

Подставим в формулу $p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4}$, данные из условия: $p_1 = 1$ атм, $V_1 = 256$ л, $p_2 = 128$ атм. Решим полученное уравнение, заметив, что $1{,}4 = \frac{7}{5}$ и возведя обе части уравнения в степень $\frac{5}{7}$:

$$1 \cdot 256^{\frac{7}{5}} = 128 \cdot V_2^{\frac{7}{5}} \Leftrightarrow 256 = (2^7)^{\frac{5}{7}} \cdot V_2 \Leftrightarrow 256 = 32V_2 \Leftrightarrow V_2 = 8\,(\text{л}).$$

Ответ: 8.

25. Задание 7

Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ – постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 21 с. Ответ дайте в киловольтах.

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $t = 21$ при заданных значениях начального напряжения на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ, сопротивления резистора $R = 5 \cdot 10^6$ Ом и ёмкости конденсатора $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф:

$$t = 21 \Leftrightarrow 0,7 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot \log_2 \frac{16}{U} = 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{16}{U} = 3 \Leftrightarrow \frac{16}{U} = 8 \Leftrightarrow U = 2$$ кВ.

Ответ: 2.

26. Задание 7

Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\upsilon = 3$ моль воздуха объемом $V_1 = 8$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \upsilon T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 5,75$ – постоянная, а $T = 300$ K – температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж?

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $\alpha \upsilon T \log_2 \frac{V_1}{V_2} = 10350$ при заданных значениях постоянной $\alpha = 5,75$, температуры воздуха $T = 300$ К, количества вещества воздуха $\upsilon = 3$ моль и объема воздуха $V_1 = 8$ л:

$$5,75 \cdot 3 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{8}{V_2} = 10350 \Leftrightarrow \log_2 \frac{8}{V_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{8}{V_2} = 4 \Leftrightarrow V_2 = 2$$ л.

Ответ: 2.

27. Задание 7

Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}.$ При каком значении угла α (в градусах) время полета составит 3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $\upsilon_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $t(\alpha) = 3$ на интервале $(0^\circ;\ \ 90^\circ)$ при заданных значениях начальной скорости и ускорения свободного падения:

$$\frac{2 \cdot 30 \cdot \sin\alpha}{10} = 3 \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} \alpha = 30^\circ.$$

Ответ: 30.

28. Задание 7

Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н.м) определяется формулой $M = NIBl^2 \sin\alpha,$ где $I = 2$ А – сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл – значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м – размер рамки, $N = 1000$ – число витков провода в рамке, α – острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше 0,75 Н.м?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $NIBl^2 \sin\alpha \geq 0,75$ на интервале $(0^\circ;\ 90^\circ)$ при заданных значениях силы тока в рамке $I = 2$ А, размера рамки $l = 0,5$ м, числа витков провода $N = 1000$ и индукции магнитного поля $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл:

$$1000 \cdot 2 \cdot 0,5^2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \sin\alpha \geq 0,75 \Leftrightarrow \sin\alpha \geq 0,5 \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 30^\circ \leq \alpha < 90^\circ.$$

Ответ: 30.

29. Задание 7

Очень легкий заряженный металлический шарик зарядом $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $\upsilon = 5$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_л = q\upsilon B \sin\alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвется от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила $F_л$ была не менее чем $2 \cdot 10^{-8}$ Н? Ответ дайте в градусах.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $q\upsilon B \sin\alpha \geq 2 \cdot 10^{-8}$ на интервале $\alpha \in [0^\circ;\ 180^\circ]$ при заданных значениях заряда шарика $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл, индукции магнитного поля $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл и скорости $\upsilon = 5$ м/с:

$$2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \sin\alpha \geq 2 \cdot 10^{-8} \Leftrightarrow \sin\alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30^\circ + 360^\circ n \leq \alpha \leq 150^\circ + 360^\circ n \underset{0^\circ<\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow} 30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ.$$

Ответ: 30.

30. Задание 7

Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L=\frac{\upsilon_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $\upsilon_0=20$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g=10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 20 м?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $L\geq 20$ на интервале $(0^\circ;\ \ 90^\circ)$ при заданных значениях начальной скорости $\upsilon_0=20\ \text{м/с}$ и ускорения свободного падения $g=10\ \text{м/с}^2$:

$$\frac{20^2}{10}\sin 2\alpha\geq 20\Leftrightarrow\sin 2\alpha\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30^\circ+360^\circ n\leq 2\alpha\leq 150^\circ+360^\circ n\underset{0^\circ<2\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{0^\circ<2\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow}30^\circ\leq 2\alpha\leq 150^\circ\underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow}15^\circ\leq\alpha\leq 75^\circ.$$

Ответ: 15.

31. Задание 7

Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $\upsilon=\upsilon_0\sin\frac{2\pi t}{T},$ где t — время с момента начала колебаний, $T=12$ с — период колебаний, $\upsilon_0=0,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E=\frac{m\upsilon^2}{2},$ где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение.

Найдем скорость груза через 1 секунду после начала колебаний:

$$\upsilon=\upsilon_0\sin\frac{2\pi t}{T}=0,5\cdot\sin\frac{2\pi\cdot 1}{12}=0,5\cdot\sin\frac{\pi}{6}=0,5\cdot 0,5=0,25\ \text{м/с}$$

Найдем кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний:

$$E=\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{0,08\cdot 0,25^2}{2}=0,0025$$

Ответ: 0,0025

32. Задание 7

Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $\upsilon(t)=5\sin\pi t$ (см/с), где t – время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения была не менее 2,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $\upsilon\geq 2,5$ см/с при заданном законе изменения скорости $\upsilon(t)=5\sin\pi t$:

$$5\sin\pi t\geq 2,5\Leftrightarrow\sin\pi t\geq\frac{1}{2}\underset{0<t<1}{\Leftrightarrow}\frac{\pi}{6}\leq\pi t\leq\frac{5\pi}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{6}\leq t\leq\frac{5}{6}.$$

Таким образом, $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}=0,666...$ первой секунды после начала движения скорость груза была не менее 2,5 см/с. Округляя, получаем 0,67.

Ответ: 0,67.

33. Задание 7

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель — целое число от −2 до 2.

Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вдвое дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид

$$R=\frac{3In+Op+2Tr}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 30.

Решение.

Поскольку показатели максимальны, они все равны 2. Подставим значения в формулу и учтем, что рейтинг равен 30:

$$30=\frac{6+2+4}{A}\Leftrightarrow 30A=12\Leftrightarrow A=0,4.$$

Ответ: 0,4.

34. Задание 7

Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R=r_{\text{пок}}-\frac{r_{\text{пок}}-r_{\text{экс}}}{(K+1)\,\frac{0{,}02K}{r_{\text{пок}}+0{,}1}},$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина «Бета», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, их средняя оценка равна 0,65, а оценка экспертов равна 0,37.

Решение.

Подставим значения в формулу:

$$R=r_{\text{пок}}-\frac{r_{\text{пок}}-r_{\text{экс}}}{(K+1)\,\frac{0{,}02K}{r_{\text{пок}}+0{,}1}}=0,65-\frac{0,65-0,37}{(20+1)\,\frac{20\cdot 0{,}02}{0{,}65+0{,}1}}=0,65-\frac{0,28}{21\cdot\frac{0{,}4}{0{,}75}}=$$

$$=0,65-\frac{0,28}{21\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{3}}=0,65-\frac{0,28}{\frac{3\cdot 7\cdot 4\cdot 4}{1\cdot 10\cdot 3}}=$$

$$=0,65-\frac{0,28}{28\cdot\frac{2}{5}}=0,65-\frac{\frac{5}{2}}{100}=0,65-0,025=0,625.$$

Ответ: 0,625.

35. Задание 7

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности публикаций Tr, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель − целое число от –2 до 2.

Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — впятеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R=\frac{5In+Op+3Tr+Q}{A}.$

Если по всем четырем показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

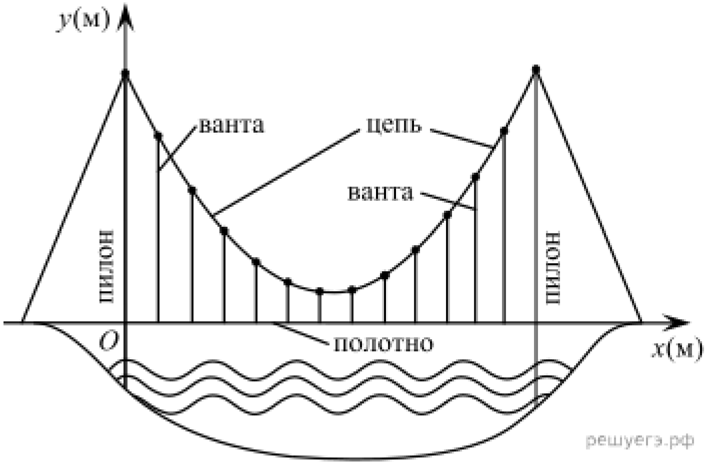
Решение.

Обозначим совпадающую оценку по разным показателям x. Поскольку все показатели равны друг другу, все они равны x. Подставим значения в формулу, учитывая, что рейтинг равен x:

$$x = \frac{5x + x + 3x + x}{A} \Leftrightarrow A = 10.$$

Ответ: 10.

36. Задание 7



На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами.

Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке.

В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}005x^2 - 0{,}74x + 25,$ где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

Решение.

Найдем длину ванты, находящейся на расстоянии 30 м от левого пилона (см. рис.), в силу симметрии она равна длине ванты, находящейся на расстоянии 30 м от правого пилона. Задача сводится к вычислению значения $y(30),$ найдём его:

$$y(30) = 0{,}005 \cdot 30^2 - 0{,}74 \cdot 30 + 25 = 4{,}5 - 22{,}2 + 25 = 7{,}3.$$

Ответ: 7,3.

Примечание 1.

Линия, по которой провисает тяжелая цепь в поле силы тяжести, является «цепной линией», которая похожа на параболу, но отличается от неё. Уравнение цепной линии: $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}),$ где a — параметр, зависящий от материала.

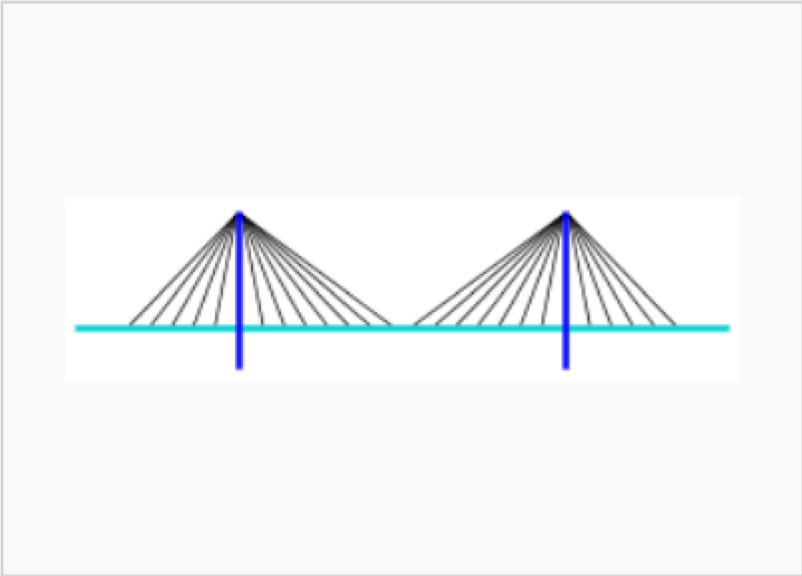
Ненагруженная цепь, подвешенная между двумя опорами, принимает форму цепной линии. Если весом цепи можно пренебречь, а вес моста равномерно распределён вдоль его длины, цепь принимают форму параболы. Если же вес цепи сравним с весом полотна (скажем, для небольших легких пешеходных мостов в горах), то его форма будет промежуточной между цепной линией и параболой.

Примечание 2.

Внимательный Сергей Пепеляев заметил, что в нижней точке моста, имеющей координату $x = 74$, ордината отрицательна: $y = -2{,}38$ метра. Оказывается, это грустная задача про мост, который ванты в центре не держат.

Примечание 3.

В решении и примечаниях выше мы использовали терминологию из условия. Она не является общепринятой. В учебной и профессиональной литературе то, что в условии названо цепью, называется нитью, поддерживающие полотно тросы называются подвеской, а вант на представленном в условии мосту нет (и сам мост — не вантовый!). Дело в том, что несущий элемент вантового моста — прямолинейные ванты, прикрепленные к пилонам. Вантовые мосты бывают двух типов — «веерный» и «арфовый», на рисунке ниже они изображены слева и справа соответственно.



Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	27953	25
2	27955	1
3	27956	6
4	27957	1,2
5	27958	2
6	27961	90
7	27963	20
8	27966	5
9	27968	2
10	27969	4000
11	27970	36
12	27971	7
13	27975	10
14	27978	2,5
15	27980	390

16	27989	30
17	27982	5000
18	27983	180000
19	27986	7
20	263802	0,00125
21	523991	30
22	27990	0,125
23	27992	2
24	525114	8
25	27994	2
26	27996	2
27	27998	30
28	27999	30
29	28002	30
30	28004	15
31	28012	0,0025
32	28014	0,67
33	317096	0,4
34	317098	0,625
35	319860	10
36	324467	7,3