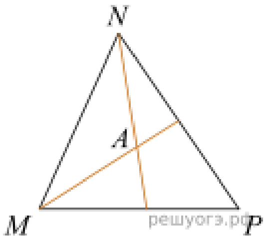
Многоугольники

1. Задание 15



Биссектрисы углов N и M треугольника MNP пересекаются в точке A. Найдите $\angle NAM$, если $\angle N = 84^\circ$, а $\angle M = 42^\circ$.

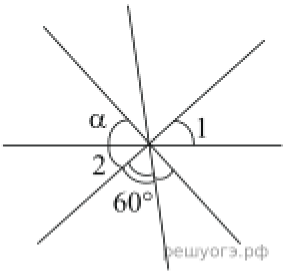
Решение.

По определению биссектрисы $\angle MNA = \dfrac{84}{2} = 42^\circ$ и $\angle NMA = \dfrac{42}{2} = 21^\circ$. В треугольнике NAM:

$$\angle NAM = 180^\circ - 42^\circ - 21^\circ = 117^\circ.$$

Ответ: 117.

2. Задание 15



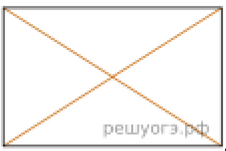
Углы, отмеченные на рисунке одной дугой, равны. Найдите угол α. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Углы 1 и 2 равны как вертикальные, поэтому $60^\circ + 3\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 40^\circ.$

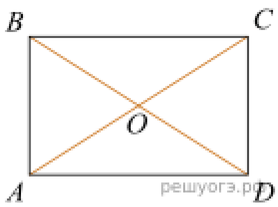
Ответ: 40.

3. Задание 15



Диагональ прямоугольника образует угол 51° с одной из его сторон. Найдите острый угол между диагоналями этого прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

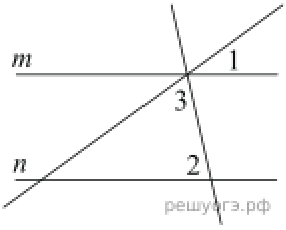
Решение.



Введём обозначения, как показано на рисунке. Пусть диагональ BD образует со стороной AB угол 51°. Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам, поэтому треугольник ABO — равнобедренный, откуда получаем, что $\angle ABO = \angle BAO = 51^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180°, откуда $\angle BOA = 180^\circ - 2 \cdot 51^\circ = 78^\circ$. Этот угол является острым углом между диагоналями прямоугольника.

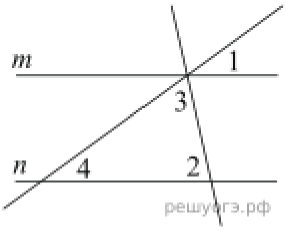
Ответ: 78°.

4. Задание 15



Прямые m и n параллельны. Найдите $\angle 3$, если $\angle 1 = 22°$, $\angle 2 = 72°$. Ответ дайте в градусах.

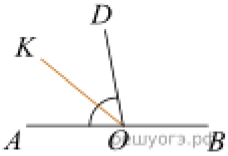
Решение.



Введём обозначение, как показано на рисунке. Углы 1 и 4 соответственные, поэтому $\angle 4 = \angle 1 = 22°$. Углы 2, 3 и 4 — это углы одного треугольника, сумма углов треугольника равна 180°, откуда $\angle 3 = 180° - 22° - 72° = 86°$.

Ответ: 86.

5. Задание 15



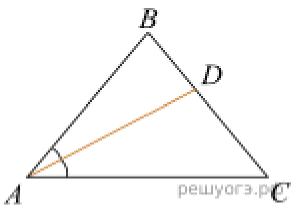
Найдите величину угла DOK, если OK — биссектриса угла AOD, $\angle DOB = 108°$. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Углы AOD и DOB — смежные, вместе составляют развёрнутый угол, следовательно, $\angle AOD = 180° - \angle DOB = 180° - 108° = 72°$. Поскольку OK — биссектриса угла AOD, $\angle AOK = \angle KOD = \angle AOD/2 = 72°/2 = 36°$.

Ответ: 36.

6. Задание 15



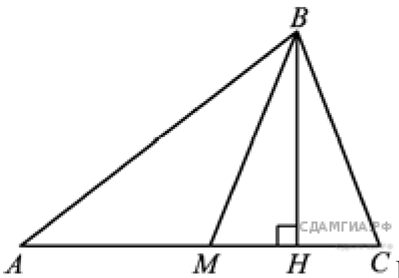
В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 48^\circ$, AD — биссектриса. Найдите угол BAD. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Поскольку AD — биссектриса, $\angle BAD = \dfrac{\angle BAC}{2} = \dfrac{48}{2} = 24$.

Ответ: 24

7. Задание 15



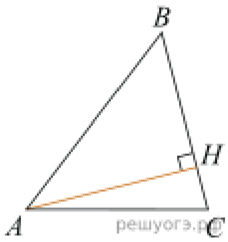
В треугольнике ABC проведены медиана BM и высота BH. Известно, что $AC = 79$ и $BC = BM$. Найдите AH.

Решение.

Поскольку BM — медиана, $AM = MC = \frac{AC}{2} = \frac{79}{2} = 39,5.$ Рассмотрим треугольник BMC, $BC = BM$, следовательно, треугольник BMC — равнобедренный, BH — высота, следовательно, BH — медиана, откуда $MH = HC = \frac{MC}{2} = \frac{39,5}{2} = 19,75.$ Найдём AH : $AH = AM + MH = 39,5 + 19,75 = 59,25.$

Ответ: 59,25.

8. Задание 15



В остроугольном треугольнике ABC высота AH равна $20\sqrt{3}$, а сторона AB равна 40. Найдите $\cos B$.

Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABH, из теоремы Пифагора найдём BH :

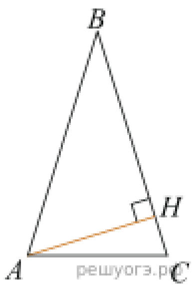
$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{1600 - 1200} = 20.$$

По определению косинус угла в прямоугольном треугольнике — это отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

9. Задание 15



В треугольнике ABC $AB = BC$, а высота AH делит сторону BC на отрезки $BH = 64$ и $CH = 16$. Найдите $\cos B$.

Решение.

Из треугольника ABH, по определению косинуса:

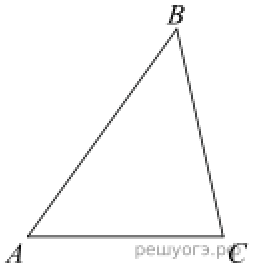
$$\cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{BC} = \frac{BH}{BH + CH} = \frac{64}{64 + 16} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Ответ: 0,8.

10. Задание 15

Углы *B* и *C* треугольника *ABC* равны соответственно 65° и 85°. Найдите *BC*, если радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, равен 14.

Решение.



Сумма углов треугольника равна 180°, поэтому $\angle A = 180^\circ - 65^\circ - 85^\circ = 30^\circ$. По теореме синусов:

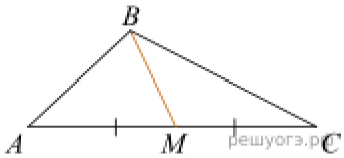
$$2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Откуда получаем, что

$$BC = 2R \cdot \sin A = 2 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} = 14.$$

Ответ: 14.

11. Задание 15



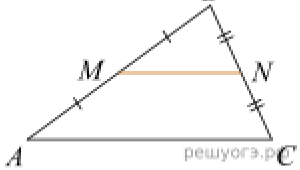
В треугольнике ABC известно, что $AC = 54$, BM — медиана, $BM = 43$. Найдите AM.

Решение.

Так как BM — медиана, следовательно, $AM = \frac{AC}{2} = \frac{54}{2} = 27$

Ответ: 27

12. Задание 15



Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, сторона AB равна 28, сторона BC равна 19, сторона AC равна 34. Найдите MN

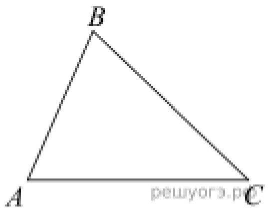
Решение.

Поскольку MN соединяет середины двух сторон треугольника ABC, MN является средней линией, она параллельна AC и равна её половине:

$$MN = \frac{AC}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

Ответ: 17

13. Задание 15



В треугольнике *ABC* известно, что $AB = 6, BC = 10, \sin\angle ABC = \frac{1}{3}.$ Найдите площадь треугольника *ABC*.

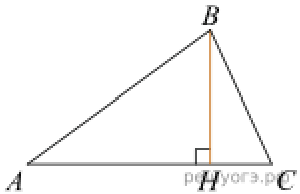
Решение.

Площадь треугольника равняется половине произведения двух сторон на синус угла между ними: $S = \frac{AB \cdot BC \sin ABC}{2},$ поэтому

$$S = \frac{6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3}}{2} = 10.$$

Ответ: 10.

14. Задание 15



В остроугольном треугольнике *ABC* проведена высота *BH*, $\angle BAC = 37^\circ$. Найдите угол *ABH*. Ответ дайте в градусах.

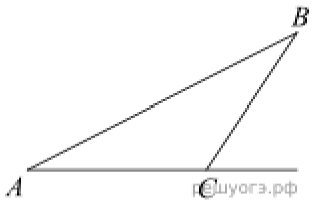
Решение.

Так как углы $\angle BAC$ и $\angle BAH$ образованы одними лучами, то они равны. В треугольнике ABC:

$$\angle ABH = 180^\circ - \angle BAH - \angle BHA = 180^\circ - 37^\circ - 90^\circ = 53^\circ$$

Ответ: 53.

15. Задание 15



В треугольнике *ABC* угол *C* равен 133°. Найдите внешний угол при вершине *C*. Ответ дайте в градусах.

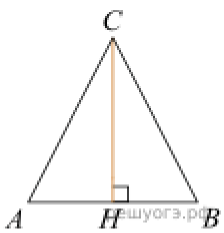
Решение.

Внешний угол треугольника является смежным с $\angle C$, а значит,

$$\angle C_{\text{внешн}} = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 133^\circ = 47^\circ.$$

Ответ: 47.

16. Задание 15



В равнобедренном треугольнике ABC $AC = BC$. Найдите AC, если высота $CH = 12,\ AB = 10$.

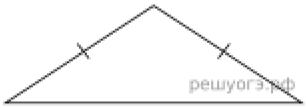
Решение.

В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание делит основание пополам, то есть CH делит AB пополам. Тогда получаем прямоугольный треугольник ACH с двумя известными катетами $CH = 12$ и $HA = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{10}{2} = 5,$ гипотенузой которого является искомая AC. По теореме Пифагора найдем

$$AC = \sqrt{CH^2 + HA^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13.$$

Ответ: 13.

17. Задание 15



Площадь равнобедренного треугольника равна $196\sqrt{3}$. Угол, лежащий напротив основания равен 120°. Найдите длину боковой стороны.

Решение.

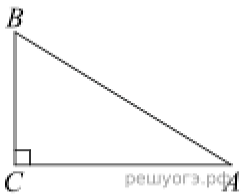
Пусть длина боковой стороны равна a. Площадь треугольника можно найти как половину произведения сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot a \sin 120^\circ \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{2S}{\sin 120^\circ}},$$

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 196\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = 2 \cdot 14 = 28.$$

Ответ: 28.

18. Задание 15



В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 15,\ \cos A = \dfrac{5}{7}.$ Найдите AB.

Решение.

Так как треугольник *ABC* — прямоугольный, то $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$. Имеем:

$$\frac{5}{7} = \frac{15}{AB} \Leftrightarrow AB = 21.$$

Ответ: 21.

19. Задание 15

Площадь прямоугольного треугольника равна $722\sqrt{3}$. Один из острых углов равен 30°. Найдите длину катета, лежащего напротив этого угла.

Решение.

Пусть длина гипотенузы равна c, а длина катета, лежащего напротив угла 30° равна a. Сумма углов в треугольнике равна 180°, следовательно, второй острый угол равен $180° - 90° - 30° = 60°$. Площадь треугольника можно найти как половину произведения двух сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{\cos 60^\circ}\sin 60^\circ = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg} 60^\circ.$$

Откуда получаем:

$$a = \sqrt{\frac{2S}{\operatorname{tg} 60^\circ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 722\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{1444} = 38.$$

Приведем другое решение.

Катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы. Пусть a — длина катета, лежащего напротив угла 30°, тогда длина гипотенузы равна $2a$. Найдем второй катет b по теореме Пифагора:

$$b = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, тогда

$$722\sqrt{3} = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{3},$$ откуда $a = \sqrt{1444} = 38.$

Ответ: 38.

20. Задание 15

Разность углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 40°. Найдите меньший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Решение.

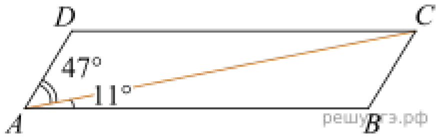
Пусть меньший угол равен x, тогда больший угол равен $x + 40^\circ$.

Поскольку сумма односторонних углов равна 180°, имеем: $x + x + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2x = 140^\circ \Leftrightarrow x = 70^\circ$.

Таким образом, наименьший угол параллелограмма равен 70°.

Ответ: 70.

21. Задание 15



В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Угол DAC равен 47°, а угол CAB равен 11°. Найдите больший угол параллелограмма $ABCD$. Ответ дайте в градусах.

Решение.

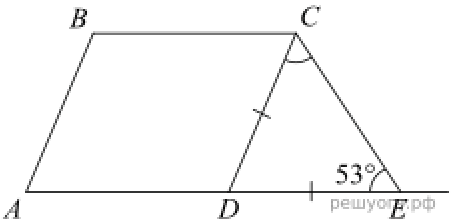
Угол DAB равен $47° + 11° = 58°$, а сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°. Поэтому угол ADC равен $180° - 58° = 122°$. Он и является наибольшим.

Ответ: 122.

22. Задание 15

На продолжении стороны AD параллелограмма $ABCD$ за точкой D отмечена точка E так, что $DC = DE$. Найдите больший угол параллелограмма $ABCD$, если $\angle DEC = 53°$. Ответ дайте в градусах.

Решение.



Треугольник CDE — равнобедренный, следовательно, $\angle DCE = \angle ECD = 53^\circ.$

Тогда угол CDE равен

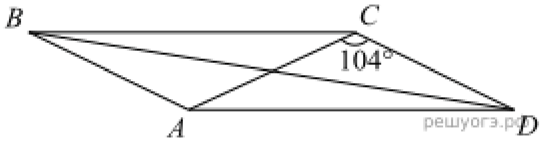
$$\angle CDE = 180^\circ - \angle DCE - \angle DEC = 180^\circ - 53^\circ - 53^\circ = 74^\circ.$$

Угол ADE — развёрнутый, он состоит из двух углов: ADC и CDE. Значит, больший угол ADC параллелограмма $ABCD$ будет равен

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle CDE = 180^\circ - 74 = 106^\circ.$$

Ответ: $106^\circ.$

23. Задание 15



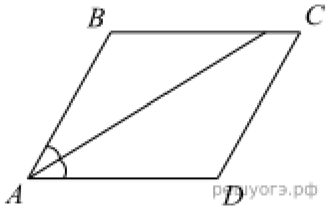
В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC в 2 раза больше стороны AB и $\angle ACD = 104°$. Найдите меньший угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Пусть точка пересечения диагоналей — точка O. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, откуда $AO = OC = AB = CD$. Поскольку $OC = CD$, треугольник COD — равнобедренный, следовательно, $\angle COD = \angle CDO = (180° - \angle ACD)/2 = 76°/2 = 38°$. Угол COD является искомым углом между диагоналями параллелограмма.

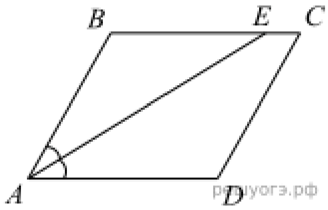
Ответ: 38.

24. Задание 15



Найдите острый угол параллелограмма $ABCD$, если биссектриса угла A образует со стороной BC угол, равный 33°. Ответ дайте в градусах.

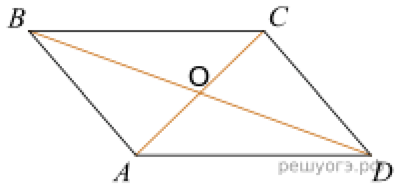
Решение.



Введём обозначения, как показано на рисунке. Углы BEA и EAD равны как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC. Поскольку AE — биссектриса угла $A, BAD = 2\angle BAE = 2\angle BEA = 66^\circ$. Сумма смежных углов параллелограмма равна 180°, поэтому угол ABC равен 114°. Таким образом, острый угол параллелограмма равен 66°.

Ответ: 66.

25. Задание 15



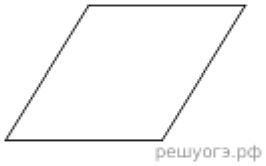
Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, $AC = 12$, $BD = 20$, $AB = 7$. Найдите DO.

Решение.

В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, поэтому $DO = 10$.

Ответ: 10.

26. Задание 15



Площадь ромба равна 27, а периметр равен 36. Найдите высоту ромба.

Решение.

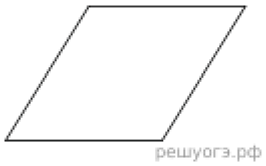
Пусть a сторона ромба, h — его высота. Все стороны ромба равны, поэтому $a = \frac{P}{4} = \frac{36}{4} = 9.$ Площадь ромба можно найти как произведение стороны на высоту:

$$S = ah \Leftrightarrow h = \frac{S}{a},$$

$$h = \frac{27}{9} = 3.$$

Ответ: 3.

27. Задание 15



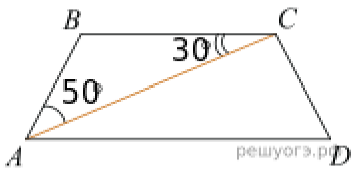
Один из углов ромба равен 43°. Найдите больший угол этого ромба. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Так как сумма односторонних углов ромба равна 180°, то больший угол равен 180° − 43°=137°.

Ответ: 137.

28. Задание 15



Найдите угол ADC равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием BC и боковой стороной AB углы, равные 30° и 50° соответственно.

Решение.

Сумма углов треугольника ABC равна 180°, поэтому угол ABC равен 180° − 30° − 50° = 100°. Сумма противоположных углов равнобедренной трапеции равна 180°, поэтому 180° − 100° = 80°.

Ответ: 80.

29. Задание 15

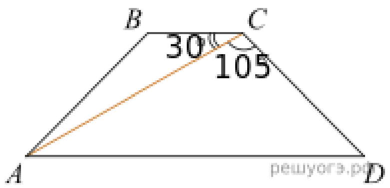
Найдите меньший угол равнобедренной трапеции, если два ее угла относятся как 1:2. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Пусть x — меньший угол трапеции, а $2x$ — больший угол. У равнобедренной трапеции углы при основаниях равны, поэтому их сумма равна $x + 2x + x + 2x = 6x$. Поскольку она равна 360°, находим: $x = 60°$.

Ответ: 60.

30. Задание 15



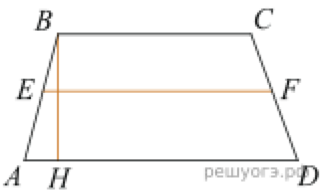
Найдите меньший угол равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием BC и боковой стороной CD углы, равные 30° и 105° соответственно.

Решение.

Поскольку угол C равен 135°, а сумма противоположных углов равнобедренной трапеции равна 180°, угол A равен 45°.

Ответ: 45.

31. Задание 15



Средняя линия трапеции равна 11, а меньшее основание равно 5. Найдите большее основание трапеции.

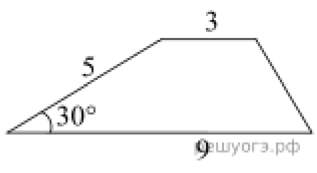
Решение.

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований. Имеем:

$$\frac{1}{2}(5 + AD) = 11 \Leftrightarrow AD = 17.$$

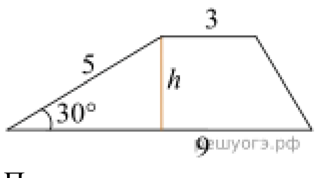
Ответ: 17.

32. Задание 15



Боковая сторона трапеции равна 5, а один из прилегающих к ней углов равен 30°. Найдите площадь трапеции, если её основания равны 3 и 9.

Решение.

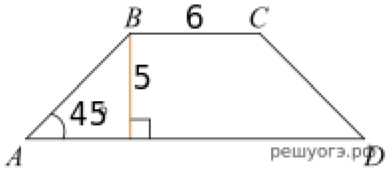


Площадь трапеции вычисляется по формуле

$S=\dfrac{a+b}{2}h,$ где a и b — основания, а h — высота трапеции. Найдём высоту: $h=5\sin 30^\circ=2{,}5,$ следовательно, $S=\dfrac{3+9}{2}\cdot 2{,}5=15.$

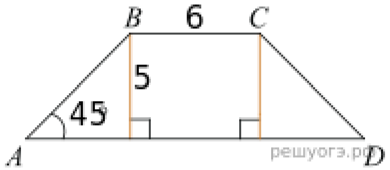
Ответ: 15.

33. Задание 15



В равнобедренной трапеции известны высота, меньшее основание и угол при основании. Найдите большее основание.

Решение.

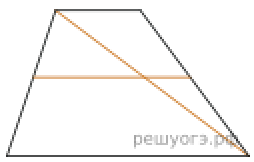


Проведём вторую высоту и введём обозначения, как показано на рисунке. Треугольник ABH — прямоугольный, угол $ABH=180^\circ-90^\circ-45^\circ=45^\circ,$ углы BAH и ABH равны, следовательно, треугольник ABH — равнобедренный, $AH=BH=5.$ В четырёхугольнике $HBCK$ $BC||HK$ и $BH||CK,$ следовательно, он параллелограмм. Угол $BHK=90^\circ,$ значит, $HBCK$ — прямоугольник, откуда $BH=CK=5$ и $BC=HK=6.$ Поскольку трапеция равнобедренная, углы BAH и CDK равны.

Треугольники ABH и CDK прямоугольные, $BH=CK, \angle BAH=\angle CDK,$ следовательно, эти треугольники равны, откуда $AH=KD=5.$ Большее основание трапеции $AD=AH+HK+KD=5+6+5=16.$

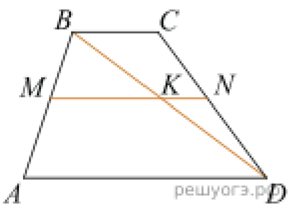
Ответ: 16.

34. Задание 15



Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

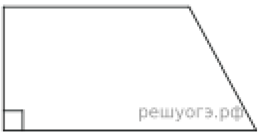
Решение.



Введём обозначения, как показано на рисунке. MN — средняя линия, поэтому, $AM=MB,$ откуда по теореме Фалеса $BK=KD.$ Рассмотрим треугольник ABD MK — средняя линия, следовательно, $MK=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{10}{2}=5.$

Ответ: 5.

35. Задание 15



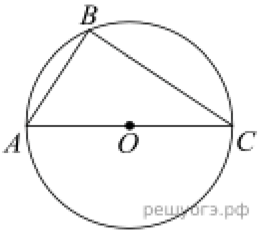
Один из углов прямоугольной трапеции равен 64°. Найдите больший угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Сумма углов в трапеции равна 360°, значит больший угол равен 360° - 90° - 90° - 64° =116°.

Ответ: 116.

36. Задание 15



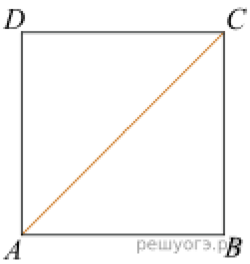
Сторона AC треугольника ABC проходит через центр описанной около него окружности. Найдите $\angle C$, если $\angle A = 75°$. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Угол B — вписанный, опирающийся на диаметр, поэтому он равен 90°. Сумма углов в треугольнике равна 180°, следовательно, $\angle C = 180^\circ - \angle B - \angle A = 180^\circ - 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$

Ответ: 15.

37. Задание 15



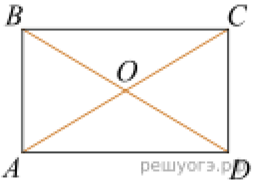
Сторона квадрата равна $7\sqrt{2}.$ Найдите диагональ этого квадрата.

Решение.

По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2$, значит, $AC = \sqrt{2 \cdot (7\sqrt{2})^2} = 14.$

Ответ: 14.

38. Задание 15



Диагонали AC и BD прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, $BO = 7$, $AB = 6$. Найдите AC.

Решение.

Диагонали в прямоугольнике равны и точкой пересечения делятся пополам, значит, $AC = BD = BO \cdot 2 = 14.$

Ответ: 14.

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	311355	117
2	311412	40
3	323537	78
4	339377	86
5	339515	36
6	348610	24
7	333116	59,25
8	339397	0,5
9	339495	0,8
10	339863	14
11	349100	27
12	349580	17
13	356159	10
14	356180	53
15	356190	47
16	311332	13
17	323376	28
18	311387	21
19	339385	38
20	132774	70
21	311911	122
22	316345	106
23	339381	38
24	348573	66
25	356914	10
26	323937	3
27	356893	137
28	193	80
29	132778	60
30	311457	45
31	311480	17
32	314876	15
33	323796	16
34	323800	5
35	356873	116

36	339503	15
37	356728	14
38	356927	14