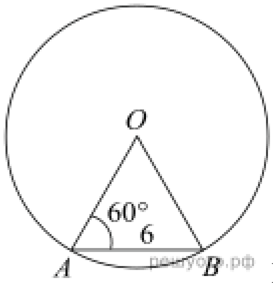
# Задание 16. Окружность, круг и их элементы.

## Центральные и вписанные углы

**1. Задание 16**



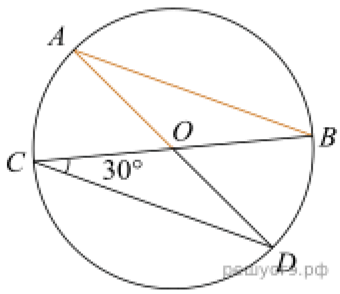

Центральный угол $AOB$ опирается на хорду $AB$ длиной 6. При этом угол $OAB$ равен 60°. Найдите радиус окружности.

**Решение.** Рассмотрим треугольник $AOB$: он равнобедренный, его боковые стороны равны радиусу.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны. Пусть $AOB$ равен $x$, тогда $x + 60° + 60° = 180°$, где $x = 60°$. Треугольник, у которого все углы равны, — равносторонний треугольник; значит, радиус равен 6.

Ответ: 6.

**2. Задание 16**

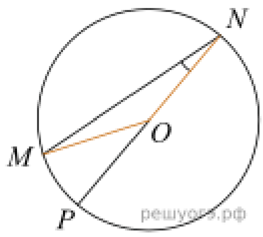



В окружности с центром в точке $O$ проведены диаметры $AD$ и $BC$, угол $OCD$ равен 30°. Найдите величину угла $OAB$.

**Решение.** Вписанные углы $BCD$ и $BAD$ опираются на одну и ту же дугу окружности, поэтому они равны. Тем самым, угол $OAB = 30°$.

Ответ: 30.

**3. Задание 16**

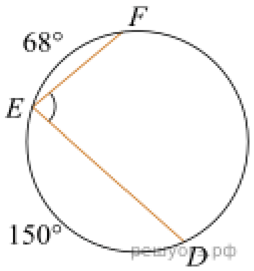



Найдите градусную меру центрального $\angle MON$, если известно, $NP$ — диаметр, а градусная мера $\angle MNP$ равна 18°.

**Решение.** Треугольник $MON$ — равнобедренный. Тогда $\angle MON = 180° - 2\cdot18° = 144°$.

Ответ: 144.

**4. Задание 16**

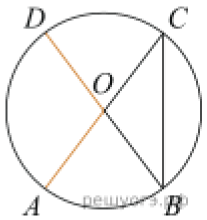



Найдите ∠$DEF$, если градусные меры дуг $DE$ и $EF$ равны 150° и 68° соответственно.

**Решение.** Дуга $FD$, не содержащая точку $E$, равна 360° − 150° − 68° = 142°, поэтому ∠$DEF$ = 71°.

Ответ: 71.

**5. Задание 16**

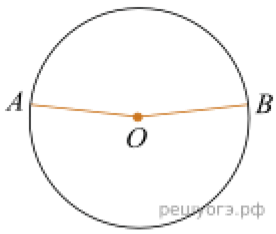



В окружности с центром $O$ $AC$ и $BD$ — диаметры. Угол $ACB$ равен 26°. Найдите угол $AOD$. Ответ дайте в градусах.

**Решение.** Угол $ACB$ — вписанный, равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу, то есть $AOB$ = 52°. Угол $BOD$ — развернутый, поэтому угол $AOD$ равен 180° − 52° = 128°.

Ответ: 128.

**6. Задание 16**

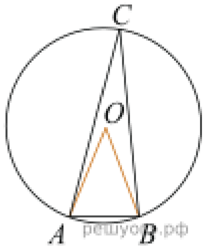



Точки $A$ и $B$ делят окружность на две дуги, длины которых относятся как 9:11. Найдите величину центрального угла, опирающегося на меньшую из дуг. Ответ дайте в градусах.

**Решение.** Дуги окружности относятся как 9:11, что в сумме дает 20 частей. Поэтому длина меньшей дуги составляет $\frac{9}{20}$ от всей окружности, тем самым, она равна $\frac{9\cdot 360^\circ}{20}=162^\circ$. Так как угол $AOB$ — центральный, то он равен той дуге на которую он опирается. Таким образом, $\angle AOB=162^\circ$.

Ответ: 162.

**7. Задание 16**

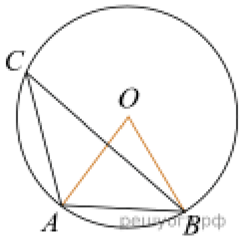



Треугольник $ABC$ вписан в окружность с центром в точке $O$. Найдите градусную меру угла $C$ треугольника $ABC$, если угол $AOB$ равен 48°.

**Решение.** Угол $AOB$ является центральным углом, $ACB$ — вписанным. Оба угла опираются на одну и ту же дугу, следовательно, угол $ACB$ в два раза меньше угла $AOB$. Тем самым, он равен 24°.

Ответ: 24.

**8. Задание 16**

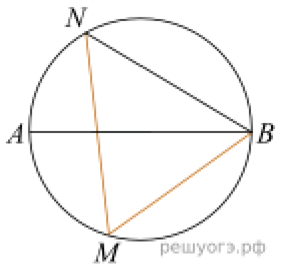



Точка $O$ — центр окружности, $\angle AOB = 84°$ (см. рисунок). Найдите величину угла $ACB$ (в градусах).

**Решение.** Вписанный угол $ACB$ равен половине центрального угла $AOB$, опирающегося на ту же дугу, поэтому он равен $42°$.

Ответ: 42.

**9. Задание 16**

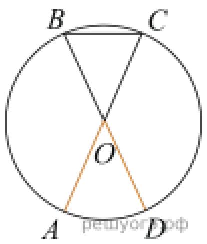



На окружности по разные стороны от диаметра $AB$ взяты точки $M$ и $N$. Известно, что $\angle NBA = 38°$. Найдите угол $NMB$. Ответ дайте в градусах.

**Решение.** Угол $NBA$ — вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую он опирается. Следовательно, дуга $AN = 2\angle NBA = 2 \cdot 38° = 76°$. Диаметр $AB$ делит окружность на две равные части, поэтому величина дуги $ANB$ равна $180°$. Откуда дуга $NB = 180° - 76° = 104°$. Угол $NMB$ — вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую он опирается, то есть равен $104°/2 = 52°$.

Ответ: 52.

**10. Задание 16**

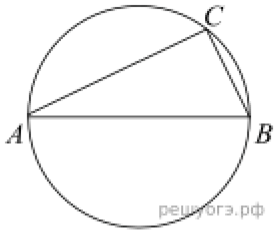



$AC$ и $BD$ — диаметры окружности с центром $O$. Угол $ACB$ равен $79°$. Найдите угол $AOD$. Ответ дайте в градусах.

**Решение.** Угол $ACB$ — вписанный, опирается на дугу $AB$, поэтому он равен половине дуги $AB$, то есть величина дуги $AB$ равна $2 \cdot 79° = 158°$. Поскольку $BD$ — диаметр, градусная мера дуги $BAD$ равна $180°$. Градусная мера дуги $AD$ равна разности градусных мер дуг $BAD$ и $AB$: $180° - 158° = 22°$. Угол $AOD$ — центральный, поэтому он равен дуге, на которую опирается, следовательно, он равен $22°$.

Ответ: 22.

**11. Задание 16**



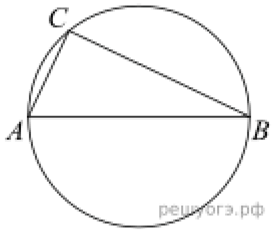

Центр окружности, описанной около треугольника *ABC*, лежит на стороне *AB*. Найдите угол *ABC*, если угол *BAC* равен 30°. Ответ дайте в градусах.

**Решение.** Известно, что если центр описанной окружности лежит на стороне треугольника, то угол напротив этой стороны — прямой. Таким образом, угол *ACB* равен 90°. Таким образом:

$$\angle ABC = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ$$

Ответ: 60

**12. Задание 16**



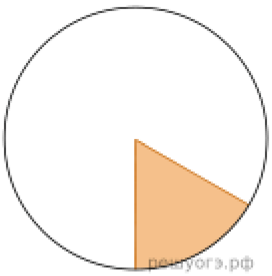

Центр окружности, описанной около треугольника *ABC*, лежит на стороне *AB*. Радиус окружности равен 6,5. Найдите *AC*, если $BC = 12$

**Решение.** Известно, что если центр описанной окружности лежит на стороне треугольника, то угол напротив этой стороны — прямой. Таким образом, угол *C* - прямой. Тогда по теореме Пифагора найдем *AC*:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2R)^2 - BC^2} =$$
$$= \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

Ответ: 5.

**13. Задание 16**




Площадь круга равна 90. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 60°.

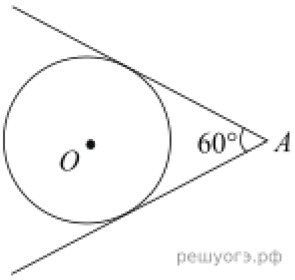
**Решение.** Площадь сектора круга, центральный угол которого равен 60°, равна шестой части площади круга. Поэтому

$$S_{\text{сек}} = \frac{90}{6} = 15.$$

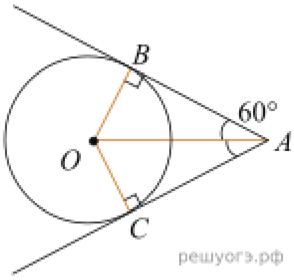
Ответ: 15.

## Касательная, хорда, секущая, радиус.

**14. Задание 16**




Из точки $A$ проведены две касательные к окружности с центром в точке $O$. Найдите радиус окружности, если угол между касательными равен 60°, а расстояние от точки $A$ до точки $O$ равно 8.




**Решение.** Проведём радиусы $OB$ и $OC$ в точки касания. Получили два прямоугольных треугольника, катет $OB = OC = R,$ где $R$ — радиус окружности, гипотенуза $AO$ этих двух прямоугольных треугольников — общая, следовательно, эти треугольники равны. То есть, имеется равенство углов

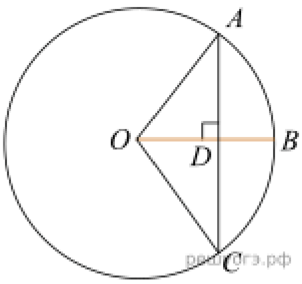
$$\angle BAO = \angle OAC = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Теперь из треугольника $AOB$ найдём радиус $OB$

$$OB = AO \cdot \sin 30^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Ответ: 4.

**15. Задание 16**

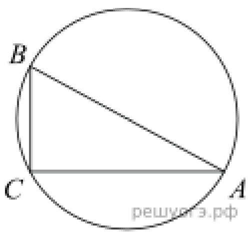



Радиус $OB$ окружности с центром в точке $O$ пересекает хорду $AC$ в точке $D$ и перпендикулярен ей. Найдите длину хорды $AC$, если $BD = 1$ см, а радиус окружности равен 5 см.

**Решение.** Найдем отрезок $DO$: $DO = OB - BD = 5 - 1 = 4$. Так как $OB$ перпендикулярен $AC$, треугольник $AOD$ — прямоугольный. По теореме Пифагора имеем: $AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. Треугольник $AOC$ — равнобедренный так как $AO = OC = r$, тогда $AD = DC$. Таким образом, $AC = AD \cdot 2 = 6$.

Ответ: 6.

**16. Задание 16**



В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен 90°, $AC$ = 30, $BC = 5\sqrt{13}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

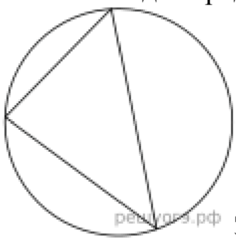
**Решение.** Вписанный прямой угол опирается на диаметр окружности, поэтому радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы. По теореме Пифагора имеем:

$$AB = \sqrt{30^2 + (5\sqrt{13})^2} = \sqrt{900 + 325} = \sqrt{1225} = 35.$$

Ответ: 17,5.

**17. Задание 16**

Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как 3:4:11. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон равна 14.



**Решение.** Заметим, что длины дуг относятся так же, как их градусные меры. Пусть первая дуга имеет градусную меру $3x$, тогда вторая дуга имеет градусную меру $4x$, а третья — $11x$. Три дуги в сумме составляют окружность, поэтому получаем:

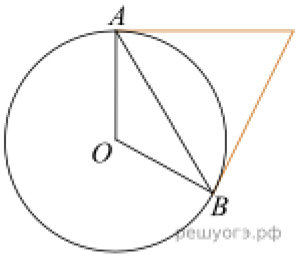
$$3x + 4x + 11x = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ.$$

Поэтому меньшая дуга окружности равна $3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$. Угол треугольника, опирающийся на эту дугу является вписанным, поэтому он равен половине дуги: $\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$ Меньший угол треугольника лежит против меньшей стороны. Найдём радиус описанной окружности:

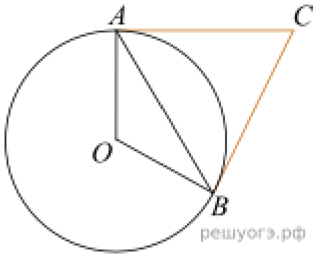
$$R = \frac{14}{2\sin 30^\circ} = \frac{14}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 14.$$

Ответ: 14.

**18. Задание 16**




Касательные в точках $A$ и $B$ к окружности с центром $O$ пересекаются под углом 72°. Найдите угол $ABO$. Ответ дайте в градусах.




**Решение.** Введём обозначения, как показано на рисунке. Касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны, поэтому $AC = BC$, следовательно, треугольник $ABC$ — равнобедренный.

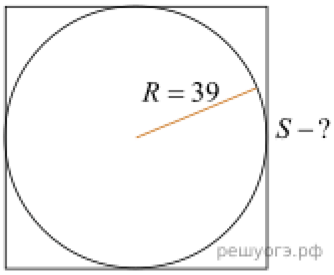
Откуда $\angle CAB = \angle CBA = \dfrac{180^\circ - \angle ACB}{2} = 54^\circ.$ Угол между касательной и хордой равен половине дуги, которую он заключает, значит, дуга $AB$ равна $108^\circ$. Угол $AOB$ — центральный, поэтому он равен дуге, на которую опирается, следовательно, равен $108^\circ$. Рассмотрим треугольник $AOB$, он равнобедренный, следовательно, $\angle OAB = \angle ABO = \dfrac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$

Ответ: 36.

**Приведем решение Юрия Петровича Кравченко.**

Введём обозначения, как показано на рисунке. Касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны, поэтому $AC = BC$, следовательно, треугольник $ABC$ — равнобедренный. Откуда $\angle CAB = \angle CBA = \dfrac{180^\circ - \angle ACB}{2} = 54^\circ.$ Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, следовательно, $\angle CBO = 90^\circ$. Тогда $\angle ABO = \angle CBO - \angle CBA = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ.$

**19. Задание 16**



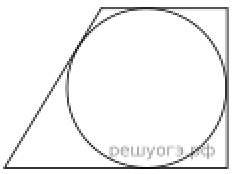

Окружность вписана в квадрат. Найдите площадь квадрата.

**Решение.** Сторона квадрата равна диаметру вписанной в него окружности, значит, площадь данного квадрата равна:

$$S = (39 + 39)^2 = 78^2 = 6084.$$

Ответ: 6084.

**20. Задание 16**



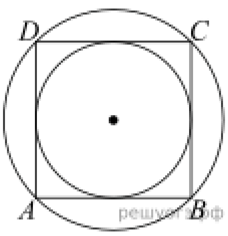

Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 16. Найдите высоту этой трапеции.

**Решение.** Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен половине высоты трапеции. Поэтому высота равна 32.

Ответ: 32.

## Окружность, описанная вокруг многоугольника

**21. Задание 16**



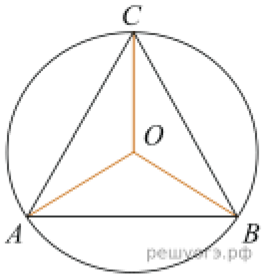
Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $4\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

**Решение.** Радиус описанной вокруг квадрата окружности равен половине его диагонали. Поэтому $AC = 8\sqrt{2},\ AB = \dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8.$ Сторона квадрата вдвое больше радиуса вписанной в него окружности. Поэтому

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Ответ: 4.

**22. Задание 16**



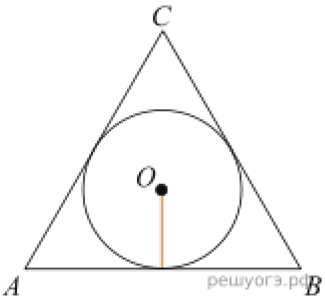

Сторона равностороннего треугольника равна $2\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

**Решение.** Треугольник *ABC* правильный, значит, все его углы равны по 60°. По теореме синусов: $\dfrac{AC}{\sin B} = 2R,$ значит

$$R = \frac{AC}{2\sin B} = \frac{2\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2.$$

Ответ: 2.

**23. Задание 16**



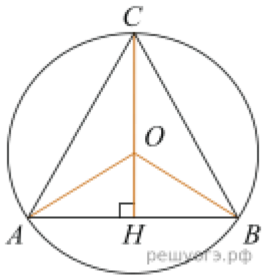

Сторона равностороннего треугольника равна $2\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

**Решение.** Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению площади к полупериметру:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AB^2\sin 60^\circ}{\frac{3AB}{2}} = \frac{2\sqrt{3}\sin 60^\circ}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

**24. Задание 16**



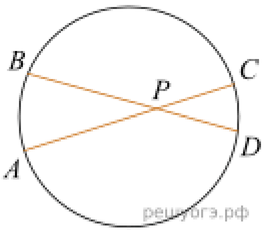

Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен 6. Найдите высоту этого треугольника.

**Решение.** Треугольник $ABC$ правильный, значит, все углы равны по 60°. Тогда

$$CH = AC\sin A = 2R\sin B\sin A = 2\cdot 6\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 9.$$

Ответ: 9.

**25. Задание 16**



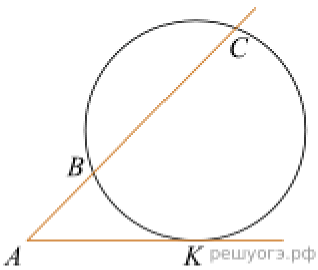

Хорды $AC$ и $BD$ окружности пересекаются в точке $P$, $BP = 15$, $CP = 6$, $DP = 10$. Найдите $AP$.

**Решение.** Так как хорды $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $P$, по свойству хорд: $BP\cdot PD = AP\cdot PC$, значит

$$AP = \frac{BP\cdot PD}{PC} = \frac{15\cdot 10}{6} = 25.$$

Ответ: 25.

**26. Задание 16**



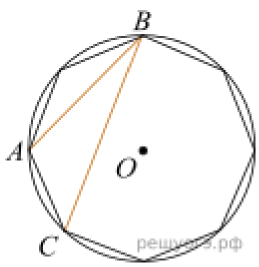

Через точку $A$, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке $K$. Другая прямая пересекает окружность в точках $B$ и $C$, причём $AB = 2$, $AC = 8$. Найдите $AK$.

**Решение.** Если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то квадрат длины касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть: $AK^2 = AB\cdot AC,$ поэтому

$$AK = \sqrt{AB\cdot AC} = \sqrt{2\cdot 8} = 4.$$

Ответ: 4.

**27. Задание 16**

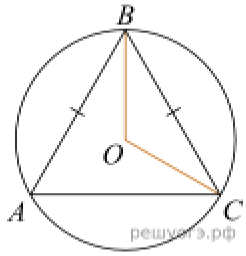


В окружность вписан равносторонний восьмиугольник. Найдите величину угла *ABC*.

**Решение.** Построим *OA* и *OC* радиусы. Центральный угол *AOC* равен 360°:8 = 45°. Угол *ABC* — вписанный и опирается на ту же дугу, поэтому он равен 45°:2 = 22,5°.

Ответ: 22,5.

**28. Задание 16**




Окружность с центром в точке *O* описана около равнобедренного треугольника *ABC*, в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = 177°$. Найдите величину угла *BOC*. Ответ дайте в градусах.

**Решение.** Угол *BOC* — центральный, поэтому он равен величине дуги, на которую опирается. Углы *BAC* вписанный, он равен половине дуги, на которую он опирается. Поскольку эти углы опираются на одну и ту же дугу, $\angle BOC = 2\angle BAC$. Сумма углов треугольника равна 180°. Треугольник *ABC* — равнобедренный, углы при его основании равны, поэтому

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{180° - 177°}{2} = 1,5°.$$

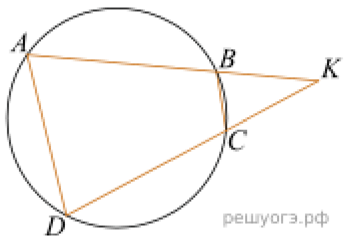
Следовательно, угол $BOC = 3°$.

Ответ: 3.

**Примечание.**

Внимательный читатель заметит, что угол *B* тупой, поэтому центр окружности лежит вне треугольника. Очевидно, что это не влияет на справедливость вышеприведенного решения — задачу можно решить и вовсе без рисунка. Поэтому мы не стали менять тот рисунок, который был дан авторами задания.

**29. Задание 16**




Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность. Прямые *AB* и *CD* пересекаются в точке *K*, $BK = 8$, $DK = 12$, $BC = 6$. Найдите *AD*.

**Решение.** Если четырёхугольник вписан в окружность, то суммы величин его противоположных углов равны 180°, значит, $\angle DAB + \angle BCD = 180°$. $\angle KCB + \angle BCD = 180°$, так как они смежные, следовательно, $\angle KCB = \angle DAB$. Треугольники *KCB* и *KAD* подобны по двум углам ($\angle K$ — общий, $\angle KCB = \angle DAB$). Из подобия: $\frac{BC}{AD} = \frac{KB}{DK}$, поэтому

$$AD = \frac{DK}{KB} \cdot BC = \frac{12}{8} \cdot 6 = 9.$$

Ответ: 9.