

Всероссийская олимпиада школьников

2017-2018 учебный год

Школьный этап олимпиады по математике

10 класс

1. Велосипедист ехал из пункта А в пункт В со скоростью 30 км/ч, а обратно – со скоростью 20 км/ч. Какова средняя скорость его движения (в км/ч)?

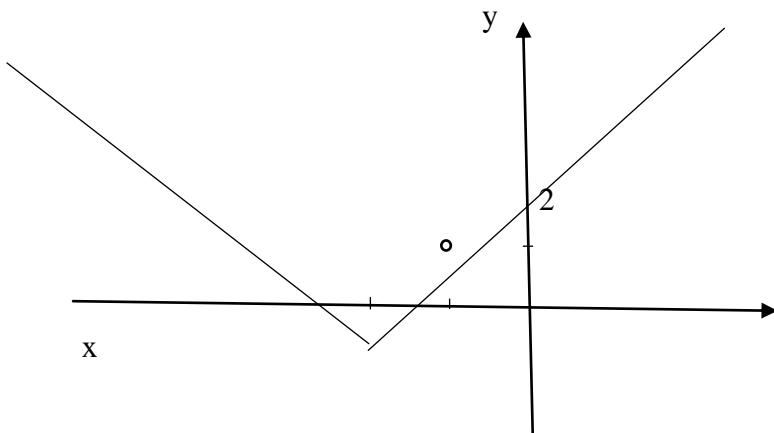
Решение. Пусть расстояние между пунктами равно s . Найдем среднюю скорость, разделив общий путь на время движения:

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{30} + \frac{s}{20}} = 24.$$

Ответ: 24.

2. Постройте график функции: $y(x) = \frac{|x^2 + x - 2|}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$.

Решение. $y(x) = \frac{|x^2 + x - 2|}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} = |x + 2|$ при $x \neq 1$



3. В классе не менее 95,5% и не более 96,5% учеников учатся без двоек. При каком наименьшем числе учеников это возможно?

Решение. Исходя из условия задачи заключаем, что, хотя бы один двоичник в классе есть. Понятно, что меньше всего учеников будет в классе, где двоичник только один. Поскольку двоичников – не более 4,5% от общего числа учеников, то всего в классе не менее $1 : 0,045 = 22 \frac{2}{9}$ человек, т. е. не менее 23 человек. Класс из 23 учеников, среди которых ровно один двоичник, удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 23.

4. В трапеции большее основание имеет длину 20, боковые стороны – 13 и 15, а высота – 12. Найдите длину меньшего основания трапеции, если известно, что она (длина) больше 10.

Решение. Проекции боковых сторон на прямую, содержащую основание трапеции, равны 9 и 5. Если меньшее основание проектируется внутрь большего, то его длина равна $20 - (9 + 5) = 6$ (рис.1), что противоречит условию. Значит, имеет место случай, изображенный на рис.2. Тогда меньшее основание равно $11 + 5 = 16$.

Ответ: 16.

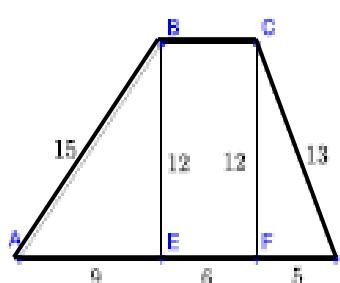


Рис. 1

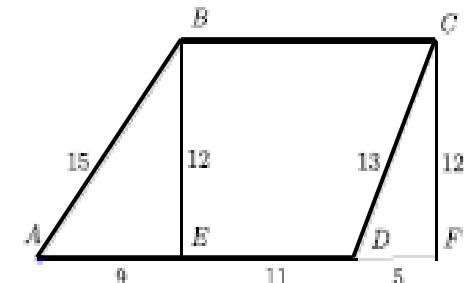
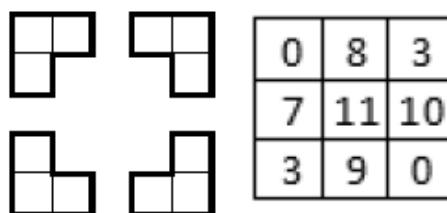


Рис. 2

5. В таблице 3×3 записаны числа, как показано на рисунке. За ход разрешается выбирать три клетки в форме трёхклеточного уголка и уменьшить число в каждой из них на 1. Покажите, как такими операциями сделать таблицу, в которой во всех клетках стоят нули.



Решение.

Один из способов таков.

<table border="1"><tr><td>0</td><td>8</td><td>3</td></tr><tr><td>7</td><td>11</td><td>10</td></tr><tr><td>3</td><td>9</td><td>0</td></tr></table>	0	8	3	7	11	10	3	9	0	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td>-3</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>			-3							<table border="1"><tr><td>0</td><td>5</td><td>0</td></tr><tr><td>4</td><td>11</td><td>7</td></tr><tr><td>0</td><td>6</td><td>0</td></tr></table>	0	5	0	4	11	7	0	6	0	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td>-4</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>			-4							<table border="1"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>7</td><td>7</td></tr><tr><td>0</td><td>6</td><td>0</td></tr></table>	0	1	0	0	7	7	0	6	0	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td>-6</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>			-6							<table border="1"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	1	0	0	1	1	0	0	0	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td>-1</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>			-1							<table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	8	3																																																																																							
7	11	10																																																																																							
3	9	0																																																																																							
		-3																																																																																							
0	5	0																																																																																							
4	11	7																																																																																							
0	6	0																																																																																							
		-4																																																																																							
0	1	0																																																																																							
0	7	7																																																																																							
0	6	0																																																																																							
		-6																																																																																							
0	1	0																																																																																							
0	1	1																																																																																							
0	0	0																																																																																							
		-1																																																																																							
0	0	0																																																																																							
0	0	0																																																																																							
0	0	0																																																																																							

Сначала обнуляем угловые ячейки с числами «3» вместе с их соседями. Затем уменьшаем ячейки с числами 4, 11 и 5. Потом уменьшаем ячейки с числами 6, 7, 7. Из результата легко получается таблица с нулями.

Примечание. Заметим, что сумма чисел на большой диагонали равна 17, а сумма остальных чисел равна 34. Поэтому если выбирать только уголки, в которых одна клетка лежит на диагонали, а две другие нет, то при каждом шаге сумма чисел на диагонали будет уменьшаться на 1, а сумма остальных чисел на 2. Остаётся показать правильную последовательность выбора таких уголков.