

Всероссийская олимпиада школьников

2017-2018 учебный год

Школьный этап олимпиады по математике

10 класс

1. Велосипедист ехал из пункта А в пункт В со скоростью 30 км/ч, а обратно – со скоростью 20 км/ч. Какова средняя скорость его движения (в км/ч)?

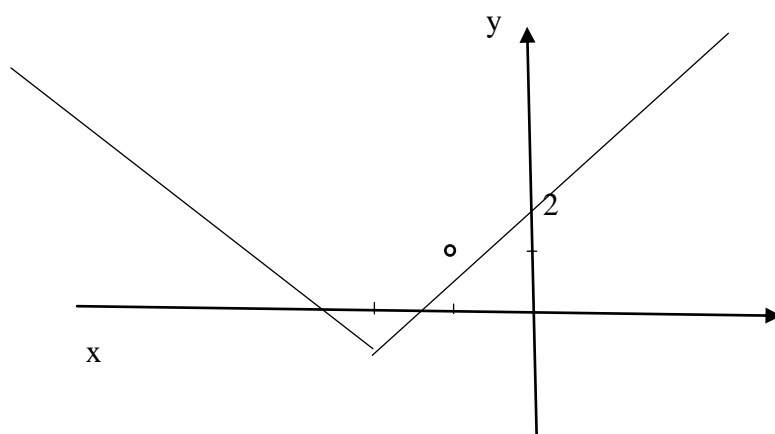
Решение. Пусть расстояние между пунктами равно s . Найдем среднюю скорость, разделив общий путь на время движения:

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{30} + \frac{s}{20}} = 24.$$

Ответ: 24.

2. Постройте график функции: $y(x) = \frac{|x^2 + x - 2|}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$.

Решение. $y(x) = \frac{|x^2 + x - 2|}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} = |x + 2|$ при $x \neq -1$



3. В классе не менее 95,5% и не более 96,5% учеников учатся без двоек. При каком наименьшем числе учеников это возможно?

Решение. Исходя из условия задачи заключаем, что, хотя бы один двоечник в классе есть. Понятно, что меньше всего учеников будет в классе, где двоечник только один. Поскольку двоечников – не более 4,5% от общего числа учеников, то всего в классе не менее $1 : 0,045 = 22 \frac{2}{9}$ человек, т. е. не менее 23 человек. Класс из 23 учеников, среди которых ровно один двоечник, удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 23.

4. В трапеции большее основание имеет длину 20, боковые стороны – 13 и 15, а высота – 12. Найдите длину меньшего основания трапеции, если известно, что она (длина) больше 10.

Решение. Проекция боковых сторон на прямую, содержащую основание трапеции, равны 9 и 5. Если меньшее основание проектируется внутрь большего, то его длина равна $20 - (9 + 5) = 6$ (рис.1), что противоречит условию. Значит, имеет место случай, изображенный на рис.2. Тогда меньшее основание равно $11 + 5 = 16$.
 Ответ: 16.

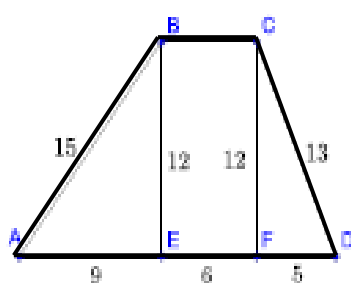


Рис. 1

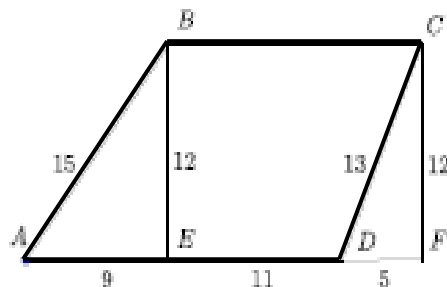


Рис. 2

5. В таблице 3 x 3 записаны числа, как показано на рисунке. За ход разрешается выбрать три клетки в форме трёхклеточного уголка и уменьшить число в каждой из них на 1. Покажите, как такими операциями сделать таблицу, в которой во всех клетках стоят нули.

					0	8	3
					7	11	10
					3	9	0

Решение.

Один из способов таков.

0	8	3				0	5	0				0	1	0				0	0	0
7	11	10				4	11	7				0	7	7				0	0	0
3	9	0				0	6	0				0	6	0				0	0	0

Сначала обнуляем угловые ячейки с числами «3» вместе с их соседями. Затем уменьшаем ячейки с числами 4, 11 и 5. Потом уменьшаем ячейки с числами 6, 7, 7. Из результата легко получается таблица с нулями.

Примечание. Заметим, что сумма чисел на большой диагонали равна 17, а сумма остальных чисел равна 34. Поэтому если выбирать только уголки, в которых одна клетка лежит на диагонали, а две другие нет, то при каждом шаге сумма чисел на диагонали будет уменьшаться на 1, а сумма остальных чисел на 2. Остаётся показать правильную последовательность выбора таких уголков.