

Всероссийская олимпиада школьников

2017-2018 учебный год

Школьный этап олимпиады по математике

11 класс

№1.

Решить систему:
$$\begin{cases} \frac{2}{2x-y} + \frac{3}{x-2y} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2x-y} - \frac{1}{x-2y} = \frac{1}{18} \end{cases}$$

Решение.

Пусть $\frac{1}{2x-y} = u$ и $\frac{1}{x-2y} = v$, тогда получим:

$$\begin{cases} 2u + 3v = \frac{1}{2} \\ 2u - v = \frac{1}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4v = \frac{8}{18} \\ 2u - v = \frac{1}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{9} \\ u = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} 2x - y = 12 \\ x - 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$

Так как уравнения с переменными в знаменателях, то проверка обязательна:

$$\begin{cases} \frac{2}{12} + \frac{3}{9} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{12} - \frac{1}{9} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \end{cases}$$

Ответ: $x = 5$, $y = -2$.

№2 Построить график функции: $y = \sqrt{4\sin^4 x - 2\cos 2x + 3} + \sqrt{4\cos^4 x + 2\cos 2x + 3}$

Решение.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4\sin^4 x - 2\cos 2x + 3} + \sqrt{4\cos^4 x + 2\cos 2x + 3} \\ y &= \sqrt{4\sin^4 x - 2 + 4\sin^2 x + 3} + \sqrt{4\cos^4 x + 4\cos^2 x + 1} \\ y &= \sqrt{4\sin^4 x + 4\sin^2 x + 1} + \sqrt{4\cos^4 x + 4\cos^2 x + 1} \\ y &= 2\sin^2 x + 1 + 2\cos^2 x + 1 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Значит, графиком функции является прямая, заданная уравнением $y=4$.

№3. Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?

Решение:

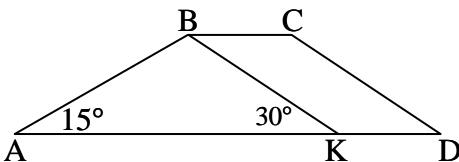
Поскольку 300 и 198 делятся на 6, Петя сможет снять лишь сумму, кратную 6 долларам. Максимальное число, кратное 6 и не превосходящее 500, - это 498.

Докажем, что снять 498 долларов возможно. Произведем следующие операции: $500-300=200$, $200+198=398$, $398-300=98$, $98+198=296$, $296+198=494$. Сумма, лежащая в банке, уменьшилась на 6 долларов.

Проделав аналогичную процедуру 16 раз, Петя снимет 96 долларов. Затем он может снять 300, положить 198 и снова снять 300. В результате у него будет 498 долларов.

№4. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна $2\sqrt{2}$, а длина основания BC равна $\sqrt{2}$. Угол $\angle A = 15^\circ$, $\angle D = 30^\circ$. Найдите длину боковой стороны AB .

Решение.



Проведем BK параллельно CD . Заметим $KD \parallel BC$, $KB \parallel DC$, следовательно, $KBCD$ параллелограмм и $KD = BC = \sqrt{2}$. AD – секущая параллельных прямых BK и CD , следовательно $\angle AKB = \angle ADC = 30^\circ$.

Далее найдем длину отрезка $AK = AD - KD = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$. Боковую сторону AB теперь можно найти по теореме синусов для треугольника ABK : $\frac{AK}{\sin \angle ABK} = \frac{AB}{\sin \angle AKB}$. При этом $\angle ABK = 180^\circ - \angle AKB - \angle BKA = 180^\circ - 30^\circ - 15^\circ = 135^\circ$.

И $\sin 135^\circ = \sqrt{2}/2$. Теперь можно найти AB , она получается равной 1.

Ответ: 1.

№5. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в седьмом подъезде в квартире № 462, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом семиэтажный. На каком этаже живёт Саша? (На всех этажах число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

Решение.

Поскольку в первых 7 подъездах не меньше 462 квартир, в каждом подъезде не меньше $462 : 7 = 66$ квартир. Следовательно, на каждом из 7 этажей в подъезде не меньше 9 квартир.

Пусть на каждой лестничной площадке по 9 квартир. Тогда в первых семи подъездах всего $9 \cdot 7 \cdot 7 = 441$ квартира, и квартира 462 окажется в восьмом подъезде, что противоречит условию.

Пусть на каждой площадке по 10 квартир. Тогда в первых семи подъездах $10 \cdot 7 \cdot 7 = 490$ квартир, а в первых шести — 420. Следовательно, квартира 462 находится в седьмом подъезде. Она в нем 42-ая по счету, поскольку на этаже по 10 квартир, она расположена на пятом этаже.

Если бы на каждой площадке было по 11 квартир, то в первых шести подъездах оказалось бы $11 \cdot 7 \cdot 6 = 462$ квартиры, то есть 462 квартира в шестом подъезде, что противоречит условию.

Тем самым, Саша живёт на пятом этаже.

Ответ: 5