

Всероссийская олимпиада школьников

2017-2018 учебный год

Школьный этап олимпиады по математике

8 класс

№1. Докажите, что $13+13^2+13^3+13^4+\dots+13^{2001}+13^{2002}$ делится нацело на 7.

Решение: $13+13^2+13^3+13^4+\dots+13^{2001}+13^{2002}=$

$$13(1+13)+13^3(1+13)+\dots+13^{2001}(1+13)=14(13+13^3+\dots+13^{2001})$$

Так как 14 делится на 7, то и само число нацело делится на 7.

№2. Если товар подорожает сначала на 10%, а потом подешевеет на 10%, то когда его цена будет ниже: до подорожания или после снижения?

Решение:

Обозначим первоначальную цену товара за 100%, тогда после подорожания товара на 10% новая цена будет составлять 110%. Так как 10% от 110% будет составлять 11%, то после снижения цены на 10% товар будет стоить уже $110\% - 11\% = 99\%$. Так как 99% меньше 100%, то цена товара будет ниже после снижения.

№3. Постройте график функции:

$$y = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} + \frac{x^2}{x + 1}$$

Решение.

$$y = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} + \frac{x^2}{x + 1}, \quad y = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{x^2}{x+1}, \quad x \neq 1$$

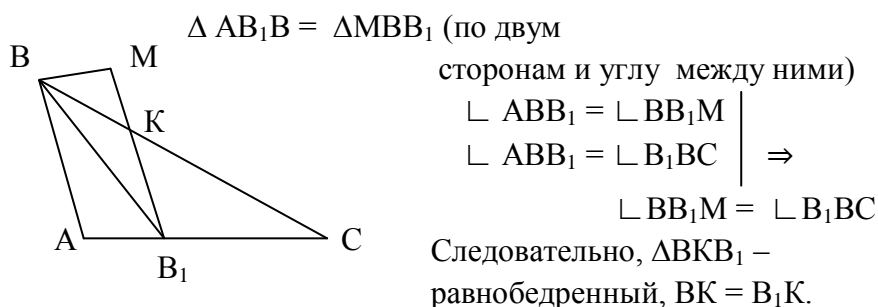
$$y = \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{x+1}, \quad y = \frac{x(1+x)}{x+1}, \quad x \neq -1$$

$$y = x$$

Значит, графиком данной функции является прямая $y = x$ (биссектриса I и III координатных четвертей) с двумя выколотыми точками $(1; 1), (-1; -1)$.

№4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1 . Пусть M – такая точка плоскости, что отрезок MB_1 пересекает сторону BC в точке K, $BM = AB_1$, $\angle MBV_1 = \angle BB_1A$. Докажите, что $BK = KB_1$.

Решение:



№5. Четверо ребят – Алексей, Борис, Владимир и Григорий участвовали в лыжных гонках. На следующий день, на вопрос, кто какое место занял, они ответили так:

Алексей: Я не был ни первым, ни последним;

Борис: Я не был последним;

Владимир: Я был первым;

Григорий: Я был последним.

Известно, что три из этих ответов были правдивыми, а один – ложью. Кто сказал правду?

Кто был первым?

Решение:

Предположим, что солгал Алексей. Тогда получается, что он был первым или последним. Значит, солгали еще Владимир или Григорий. А это противоречит тому, что солгал всего один из ребят.

Пусть солгал Борис. Тогда он был последним. Но Григорий также утверждал, что он был последним. Значит, данного случая также быть не может.

Пусть солгал Владимир. Тогда он был не первым. В этом случае все получается и первым тогда будет Борис.

Последний случай, когда солгал Григорий, быть не может, так как тогда последним никто из ребят не был.

Вывод: правду сказали Алексей, Борис, Григорий. Первым был Борис.