

Всероссийская олимпиада школьников

2017-2018 учебный год

Школьный этап олимпиады по математике

9 класс

№1. Вычеркните в числе 123456 три цифры так, чтобы получившееся трёхзначное число делилось на 27. В ответе укажите получившееся число.

Решение.

Если число делится на 27, тогда оно делится на 3 и на 9. Число делится на 9, тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 9. Число делится на 3, тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3. Заметим, что, если число делится на 9, то оно делится и на 3 (но необязательно, что делится на 27). Сумма цифр числа 123456 равна $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Вычеркнув цифры 2, 4 и 6, получим число, сумма цифр которого равна девяти. 135 делится на 27.

Ответ: 135.

№2. Построить график функции, заданной формулой $y = \sqrt{x^2} + 2x$.

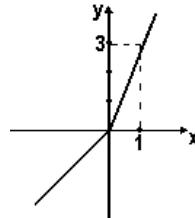
Решение.

Упростим $\sqrt{x^2} + 2x$:

$$\sqrt{x^2} + 2x = |x| + 2x = \begin{cases} -x + 2x = x, & \text{если } x < 0 \\ x + 2x = 3x, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

Тогда график будет состоять из линий:

$$y = x, \text{ где } x < 0 \text{ и } y = 3x, \text{ где } x \geq 0.$$



№3. Туристам-байдарочникам нужны восемь одинаковых «сидушек» – мягких ковриков длиной не менее 35 см и шириной не менее 20 см. В спортивном магазине продаются большие коврики длиной 110 см и шириной 56 см. Хватит ли большого коврика на восемь «сидушек»?

Решение.

Ответ. Да, хватит.

Разрежем большой коврик на два куска размерами 110x20 и 110x36. Из первого куска можно вырезать 3 «сидушки» размером 35x20 (и даже 36x20), а из второго куска – 5 «сидушек»

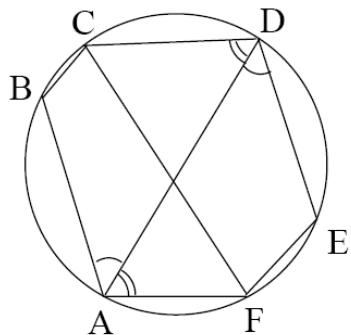
размером 35x20 (и даже 36x22).

Комментарий. Подсчет и сравнение площадей: $110 \times 56 = 6160$ – площадь большого ковра, $8 \times (35 \times 20) = 5600$ – суммарная площадь маленьких, $6160 > 5600$ – обоснованием не является.

Например, большой ковер мог быть шириной 10 см, а длиной – километр.

Его площади хватило бы, однако ни одной «сидушки» из него вырезать нельзя.

№4. Шестиугольник ABCDEF вписан в окружность. Докажите, что если $AB \parallel DE$, $AF \parallel DC$, то и $BC \parallel EF$.



Решение.

Так как $AB \parallel DE$, то $\angle BAD = \angle ADE$, а т.к. $AF \parallel CD$, то $\angle DAF = \angle ADC$.

Так как четырехугольник ABCF – вписанный, то $\angle BAF + \angle BCF = 180^\circ$. Аналогично, т.к. четырехугольник CDEF – вписанный, то $\angle CDE + \angle CFE = 180^\circ$. Так как $\angle BAF = \angle CDE$ (как суммы равных углов), то $\angle BCF = \angle CFE$, а значит, прямые BC и EF параллельны.

Замечание. Можно было не использовать вписанные четырехугольники, а просто выразить оба угла BCF и CFE через дуги.

№5. У разбойников есть 13 слитков золота. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух слитков. Придумайте, как за 8 взвешиваний выяснить суммарный вес всех слитков.

Решение.

Возьмем три первых слитка и взвесим их попарно: C_1+C_2 , C_1+C_3 , C_2+C_3 , затратив три взвешивания. Сложив результаты этих взвешиваний и поделив пополам, найдем суммарный вес этих трех слитков: $((C_1+C_2)+(C_1+C_3)+(C_2+C_3))/2 = C_1+C_2+C_3$. За оставшиеся пять взвешиваний найдем вес остальных 10 слитков: объединим их в 5 пар и взвесим каждую пару.