Всероссийская олимпиада школьников

2018-2019 учебный год

Школьный этап олимпиады по математике

11 класс

РЕШЕНИЯ

1. Пояснение.

Разложим число 20 на слагаемые различными способами:

$$20 = 9 + 9 + 2 = 9 + 8 + 3 = 9 + 7 + 4 = 9 + 6 + 5 = 8 + 8 + 4 = 8 + 7 + 5 = 8 + 6 + 6 = 7 + 7 + 6.$$

При разложении способами 1−4, 7 и 8 суммы квадратов чисел не кратны трём. При разложении пятым способом сумма квадратов кратна девяти. Разложение шестым способом удовлетворяет условиям задачи. Таким образом, условию задачи удовлетворяет любое число, записанное цифрами 5, 7 и 8, например, число 578.

2. Решение.

Поскольку в первых 8 подъездах не меньше 468 квартир, в каждом подъезде не меньше 468 : 8 = 58,5 квартир. Следовательно, на каждом из 12 этажей в подъезде не меньше 4 квартир.

Пусть на каждой лестничной площадке по 4 квартиры. Тогда в первых восьми подъездах всего $4 \cdot 8 \cdot 12 = 384$ квартиры, и квартира 468 окажется не в восьмом подъезде, что противоречит условию.

Пусть на каждой площадке по 5 квартир. Тогда в первых восьми подъездах $5 \cdot 8 \cdot 12 = 480$ квартир, а в первых семи — 420. Следовательно, квартира 468 находится в восьмом подъезде. Она в нем 48-ая по счету, поскольку на этаже по 5 квартир, она расположена на десятом этаже.

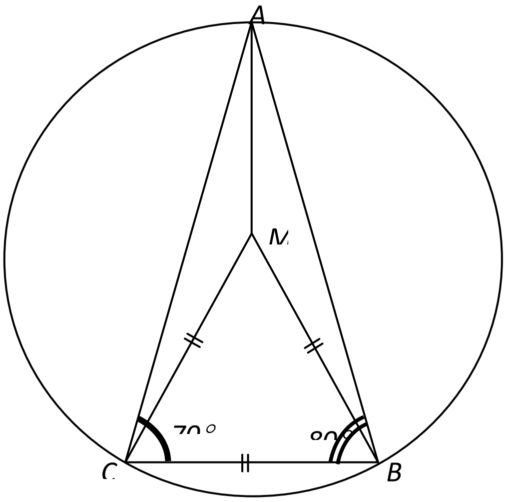
Если бы на каждой площадке было по 6 квартир, то в первых семи подъездах оказалось бы $6 \cdot 7 \cdot 12 = 504$ квартиры, то есть 482 квартира в седьмом подъезде, что противоречит условию.

Тем самым, Саша живёт на десятом этаже.

Ответ: 10

3. Ответ: $20°$ и $10°$.

Решение. Рассмотрим окружность с центром в точке M и радиусом $R = MB = MC$. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) = 30°$, $\angle BMC = 60^0 \Rightarrow$ точка A лежит на окружности с центром в точке M, т.е. окружность является описанной около Δ ABC, значит $AM = BM = CM$, тогда $\angle MAB = \angle MBA = 20°$, $\angle MAC = \angle MCA = 10°$.



4. Решение.

Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков.

5. Решение.

Заменим первое уравнение разностью, а второе — суммой исходных уравнений:

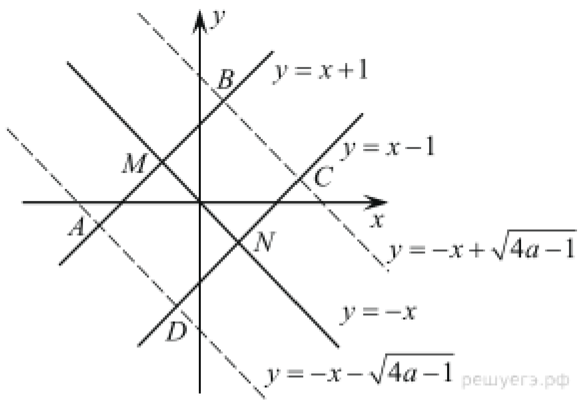
$$\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ 2xy=2a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1, & (1) \\ (x+y)^2=4a-1. & (2) \end{cases}$$

При $a<\dfrac{1}{4}$ второе уравнение системы, а, значит, и вся система решений не имеет. При $a\geq\dfrac{1}{4}$ получаем:

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=x-1, \\ y=x+1. \end{array}\right.$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=-x-\sqrt{4a-1}, \\ y=-x+\sqrt{4a-1}. \end{array}\right.$$

Ясно (см. рисунок), что при $a>\dfrac{1}{4}$ система имеет четыре решения (координаты точек *A*, *B*, *C* и *D*), а при $a=\dfrac{1}{4}$ — два решения (координаты точек *M* и *N*).



Ответ: $a = \dfrac{1}{4}.$