Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)

2020-2021 учебный год

10 класс(Решения)

1. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна наименьшему значению трехчлена $2x^2-4x+10$. Найдите сумму одиннадцати первых членов этой прогрессии.

Наименьшее значение выражения $2x^2-4x+10=2\left(x^2-2x+1\right)+8=2\left(x-1\right)^2+8\geq 8$ равно 8.

Значит $a_3+a_9=a_1+2d+a_1+8d=2a_1+10d=8$.

Тогда сумма одиннадцати первых членов этой прогрессии $S_{11}=\dfrac{2a_1+\left(11-1\right)d}{2}11=\dfrac{2a_1+10d}{2}11=\dfrac{8}{2}\cdot 11=44$.

<u>Ответ:</u> 44.

2. Решить в целых числах уравнение: $3x^2+4xy-7y^2=13$.

Разложением на множители получим $\left(x-y\right)\left(3x-7y\right)=13$, заметим, что в данном случае мы ничего не прибавляли к обеим частям уравнения. Так как число 13 – это $13\cdot 1$, $1\cdot 13$, $-13\cdot(-1)$, $-1\cdot(-13)$, то мы получаем совокупность четырех систем:

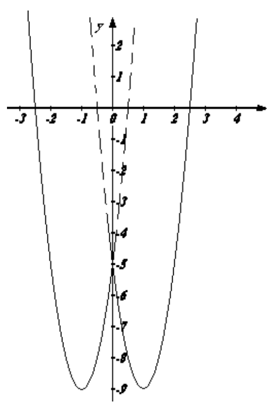
$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x-y=1, \\ 3x+7y=13; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x-y=13, \\ 3x+7y=1; \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} x-y=-1, \\ 3x+7y=-13; \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} x-y=-13, \\ 3x+7y=-1; \end{cases} & (4) \end{array}\right.$$

Решая системы выражением одной переменной через другую, получаем, что системы (2) и (4) решений в целых числах не имеют, а ответами систем (1) и (3) являются соответственно $x = 2, y = 1$ и $x = -2$, $y = -1$.

3. Построить график функции: $y=4x^2-8|x|-5$

$$y=4x^2-8|x|-5 \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x^2+8x-5 & \textit{при } x<0 \\ y=4x^2-8x-5 & \textit{при } x\geq 0 \end{cases}$$

Тогда график функции имеет вид:



4. Пусть a и b –длины катетов некоторого прямоугольного треугольника, c – длина гипотенузы, r – радиус вписанной в него окружности. Докажите, что $a + b = c + 2r$.

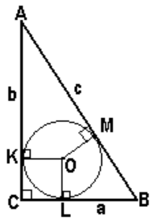
Доказательство:

$AK = AM$, $CK = CL$, $BL = BM$ – как отрезки касательных.

Сложив почленно эти равенства, получим: $AK+CK+BL = AM+CL+BM$

Прибавим к обеим частям CL: $AK+CK+BL+CL= AM+CL+BM+CL$, или

$$\underbrace{AK+CK}_{a}+\underbrace{BL+CL}_{b}=\underbrace{AM+BM}_{c}+\underbrace{CL+CL}_{2r}$$



Значит, $a + b = c + 2r$.

5. Доказать, что значение выражения

$x^5+3x^4y-5x^3y^2-15x^2y^3+4xy^4+12y^5$ не равно 33

ни при каких целых значениях x и y.

Доказательство:

$$x^5+3x^4y-5x^3y^2-15x^2y^3+4xy^4+12y^5=$$
$$=x^3(x^2-5y^2)+3x^2y(x^2-5y^2)+4y^4(x+3y)=$$
$$=(x^2-5y^2)(x^3+3x^2y)+4y^4(x+3y)=x^2(x^2-5y^2)(x+3y)+4y^4(x+3y)=$$
$$=(x+3y)(x^2(x^2-5y^2)+4y^4)=(x+3y)(x^4-5x^2y^2+4y^4)=$$
$$=(x+3y)(x^4-x^2y^2-4x^2y^2+4y^4)=(x+3y)((x^2-y^2)(x^2-4y^2))=$$
$$=(x+3y)(x-y)(x+y)(x-2y)(x+2y).$$

Полученные сомножители попарно различны и их 5; а число 33 можно разложить только на 4 различных сомножителя. $33=(-11)\cdot3\cdot(-1)\cdot1$, тогда как исходное выражение раскладывается на 5 различных множителей.