Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)

2020-2021 учебный год

10 класс(Решения)

1. Постройте график функции:

$y=\sqrt{4\sin^4 x - 2cos2x + 3} + \sqrt{4\cos^4 x + 2cos2x + 3}$

Решение.

$y=\sqrt{4\sin^4 x - 2cos2x + 3} + \sqrt{4\cos^4 x + 2cos2x + 3}$;

$y=\sqrt{4\sin^4 x - 2 + 4\sin^2 x + 3} + \sqrt{4\cos^4 x + 4\sin^2 x + 1}$;

$y=\sqrt{4\sin^4 x + 4\sin^2 x + 1} + \sqrt{4\cos^4 x + 4\sin^2 x + 1}$;

$y=2\sin^2 x + 1 + 2\cos^2 x + 1$, $y = 4$.

Поэтому графиком функции будет прямая, заданная уравнением $y = 4$.

2. Десять машин выпускают одинаковые резиновые мячи массой по 10 г каждый. Одна из машин испортилась и стала выпускать мячи массой 5 г. Как найти испортившуюся машину с помощью одного взвешивания мечей?

Решение:

Возьмём от первой машины один мяч, от второй – два, от третей – три и т.д., от десятой – десять. Найдём их общую массу. Это взвешивание будет единственным. Если бы все мячи были массой по 10г, то весы показали бы

10(1+2+3+ …+10) = 550г.

Если первая машина допускает брак, то общая масса станет меньше на 5г, если вторая, то на 10г., и т.д., если десятая, то на 50г.

Таким образом, по массе 55 мячей можно узнать, какая машина испортилась.

3. Какое наибольшее значение может принимать сумма косинусов всех углов равнобедренного треугольника?

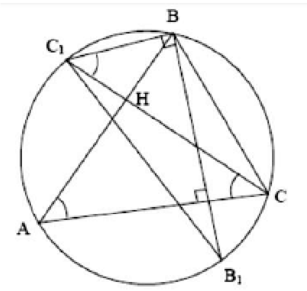
Решение. Пусть углы при основании треугольника равны α, тогда угол при вершине равен $180^0 - 2\alpha$. Найдем сумму косинусов этих углов: $2\cos\alpha + \cos(180^0 - 2\alpha) = 2\cos\alpha - \cos 2\alpha = 2\cos\alpha - 2cos^2\alpha + 1$. Выполнив замену $\cos\alpha = t$, получим квадратичную функцию $y = -2t^2 + 2t + 1$, которая достигает своего наибольшего значения при $t = 1/2$. Заметим, что $\cos\alpha$ принимает значение $1/2$ при $\alpha = 60^0$. Таким образом, максимальное значение суммы косинусов углов достигается в равностороннем треугольнике и равно $3/2$.

4. Докажите, что $2a + \frac{1}{a^2} > 3$ при $0<a<1$.

Решение.

Найдем производную функции $f(a) = 2a + 1/a^2$: $f'(a) = 2 - 2/a^3 < 0$ при $a \in (0;1)$. Значит, $f(a)$ убывает на $(0;1)$, а поэтому $f(0) > f(1)$, где $f(1) = 3$ т.е. $2a + 1/a^2 > 3$ при $a \in (0;1)$.

5. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из вершин B и C, продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1. Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC.



Решение:

Так как C_1B_1 - диаметр, то $\angle C_1BB_1 = 90^0$. Так как $BB_1 \perp AC$, то $C_1B \parallel AC$.

Поэтому $\angle BC_1C = \angle C_1CA$. Углы BC_1C и BAC равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Следовательно, $\angle C_1CA = \angle BAC$. Пусть H- основание высоты. Опущенной из вершины C. Прямоугольный треугольник AHC – равнобедренный, т.е. $\angle A = 45^0$.