

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**  
**(школьный этап)**  
**2020-2021 учебный год**  
**9 класс(Решения)**

1. 
$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 5 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 + y^2 \\ (2 + y^2)^2 - y^4 = 5 \end{cases}$$

$$y_1 = 0,5; y_2 = -0,5$$

$$x^2 = 2 + 0,5^2 y^2 = 2 + (-0,5)^2$$

$$x_1 = 1,5; x_2 = -1,5; x_1 = 1,5; x_2 = -1,5$$

Ответ: (1,5; 0,5); (-1,5; 0,5); (1,5; -0,5); (-1,5; -0,5)

2. При каких значениях  $a$  квадратные трехчлены  $x^2+ax+1$  и  $x^2+x+a$  имеют общий корень?

Пусть  $x_1$  – общий корень данных трехчленов, тогда

$$x_1^2 + a x_1 + 1 = 0 \text{ и } x_1^2 + x_1 + a = 0, \text{ т.е.}$$

$$x_1^2 + a x_1 + 1 = x_1^2 + x_1 + a \Leftrightarrow a x_1 + 1 = x_1 + a \Leftrightarrow a(x_1 - 1) = x_1 - 1 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(a - 1) = 0.$$

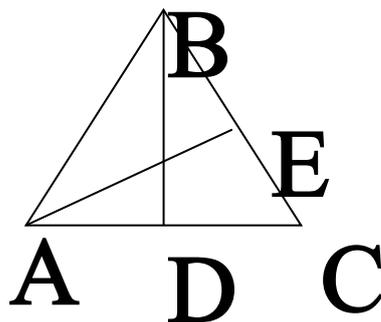
Тогда  $a = 1$  или  $x_1 = 1$ .

Если  $a = 1$ , то трехчлены оба имеют вид  $x^2+x+1$  и не имеют действительных корней.

Если  $x_1 = 1$ , то  $1^2+a \cdot 1+1=0$  и  $1^2+1+a=0$ . В обоих случаях  $a = -2$ .

Ответ:  $a = -2$ .

3. В треугольнике  $ABC$ ,  $AB = BC$ ,  $DB$  и  $AE$  – биссектрисы треугольника,  $AD = BE$ . Найдите угол  $C$ .



1) По теореме о биссектрисе угла треугольника:  $\frac{EC}{BE} = \frac{AC}{AB}$ , т.к.  $AB = BC$  то

$$\frac{EC}{BE} = \frac{AC}{BC} \quad (1)$$

2)  $BD$  – биссектриса равнобедренного треугольника  $ABC$ , проведенная к основанию, то  $BD$  – медиана треугольника  $ABC$ , следовательно

$$\left. \begin{array}{l} AC = 2AD \\ AD = BE \text{ (по условию)} \end{array} \right\} \Rightarrow AC = 2AD = 2BE$$

3)  $EC = BC - BE$ , то (1) примет вид:  $\frac{BC - BE}{BE} = \frac{2BE}{BC}$

$$\frac{BC}{BE} - 1 = \frac{2BE}{BC}$$

Пусть  $\frac{BC}{BE} = x$ ,  $\hat{d} x - 1 = \frac{2}{x}$ ;  $x^2 - x - 2 = 0$ ;  $x = 2$  – положительный корень.

Следовательно,  $\frac{BC}{BE} = 2$ ,  $BC = 2BE$ , т.е.  $AE$  – одновременно медиана и биссектриса.

Значит,  $AB = AC$ . Следовательно, треугольник  $ABC$  – равнобедренный,  $\Rightarrow \angle C = 60^\circ$

Ответ:  $\angle C = 60^\circ$

4. Цена товара сначала была снижена на 24%, а затем на 50% от новой цены. Найти общий процент снижения цены товара.

$x$  – первоначальная цена.  $100\% - 24\% = 76\%$

$0,76x$  – цена после первого снижения.

$0,76x \cdot 0,5 = 0,38x$  – цена после второго снижения

$x$  – 100%

$0,38x$  –  $m\%$

$m = 38\%$

Ответ 38%

5. Али-Баба нашел пещеру полную золота и алмазов. Полный мешок золота весит 200 кг, полный мешок алмазов 40 кг. Али-Баба может унести за один раз 100 кг. Килограмм золота стоит 20 динаров, килограмм алмазов 60 динаров. Сколько денег он может получить за золото и алмазы, унесенные в одном мешке (за один раз)?

**Решение:** Вначале заметим, что 5 кг золота имеют тот же объем, что и 1 кг алмазов, но стоят дороже. Докажем, что:

1). Али-Баба может получить за сокровища 3000 динаров. Действительно в мешок входит 40 кг алмазов. Если мы заменим 15 кг алмазов на 75 кг алмазов, то объем мешка останется прежним, а стоимость его будет равна 3000 динаров.

2). Докажем теперь, что 3000 динаров – это наибольшая сумма, которую можно выручить за сокровища. Если из мешка содержащего 25 кг и 75 кг золота убрать еще алмазов, то заменить их будет можно таким же количеством золота (чтобы не было превышения в весе) и общая стоимость уменьшится, так как алмазы стоят дороже. Если же убрать часть золота, то общая стоимость уменьшится, так как вес взятых вместо него алмазов будет в пять раз меньше (иначе – превышение по объему!). Например, если взять 5 кг золота и заменить их на 1 кг алмазов, то стоимость сокровищ уменьшится на 40 кг динаров. Ответ: 3000 динаров.